ANA MARIA DIAS ROQUE DE LEMOS BOAVIDA

Resolução de Problemas em Educação Matemática

Contributo para uma análise epistemológica e educativa das representações pessoais dos professores

2 Volumes (Vol. I)

Lisboa

1993

UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

Secção Autónoma de Ciências Sociais Aplicadas
Ciências de Educação

Resolução de Problemas em Educação Matemática

Contributo para uma análise epistemológica e educativa das representações pessoais dos professores

2 Volumes (Vol I)

Dissertação Apresentada para a Obtenção do Grau de Mestre em Ciências de Educação-Área Educação e Desenvolvimento, preparada com a Orientação de **Professora Doutora Teresa Ambrósio**

ANA MARIA DIAS ROQUE DE LEMOS BOAVIDA

Lisboa

1993

• Ao **João Miguel** e ao **Zé** pelo apoio e porque souberam compartilhar comigo a complexa gestão do tempo.

• Aos **amigos** em quem encontrei força para atravessar esta experiência de procura e questionamento. Em especial, ao **José Manuel Matos** pelas estimulantes *discussões críticas*, *conjecturas* e *refutações* sobre educação matemática que contribuiram, de uma forma inestimável, para o desenrolar deste trabalho.

Sumário

Título: Resolução de Problemas em Educação Matemática
Contributo para uma análise epistemológica e educativa das representações pessoais dos professores

Pretende-se com este estudo contribuir para a compreensão de como os professores de matemática interpretam a resolução de problemas no contexto da matemática escolar em geral e no contexto do desenvolvimento dos alunos em particular.

Como pressupostos deste trabalho estão o reconhecimento da pluralidade dos modos de aprender, da diversidade dos espaços onde o conhecimento se constrói, do carácter único da interacção da pessoa com o meio em que vive, da complexidade do fenómeno do sucesso ou insucesso em matemática e da importância de uma cultura matemática de base como condição necessária, no actual contexto histórico e social, à construção da Pessoa.

O objectivo deste estudo é duplo: (a) pesquisar e compreender as *representações pessoais* dos professores relativas a problema e resolução de problemas no âmbito da educação matemática; (b) explorar possíveis relações entre estas *representações* e as suas *filosofias pessoais* sobre matemática.

No plano metodológico este estudo foi organizado em torno de dois eixos complementares. Um eixo teórico, em que se analisaram actuais direcções na filosofia da matemática e se procurou compreender os significados de *problema* e *resolução de problemas*. Foi este eixo que organizou e serviu de base à reflexão apresentada na primeira e segunda partes do estudo. Um outro eixo foi a análise e interpretação de dados de terreno recolhidos através de entrevistas semi-estruturadas realizadas junto de professores de matemática que leccionam esta disciplina ao nível do 3º Ciclo do Ensino Básico ou Ensino Secundário.

Relativamente a este segundo eixo, há a salientar que os sentidos atribuídos pelos professores entrevistados a problema e resolução de problemas são diversos e influenciam o papel e lugar que cada professor concede à resolução de problemas perspectivada no âmbito da educação matemática. As relações entre as suas *filosofias pessoais* sobre a matemática e as *representações pessoais* relativas a resolução de problemas, são complexas e envolvem simultaneamente factores matemáticos e não matemáticos. Há ainda a destacar que os professores entrevistados sustentam, predominantemente, *filosofias pessoais* sobre a matemática, tendencialmente absolutistas.

Abstract

Title: Problem Solving in Mathematical Education
Contribution to an epistemologic and educational analisys of the teachers' personal representations

The purpose of this study is to understand how mathematics teachers interprete problem solving in the context of school mathematics in general and in the context of the evolution of students in particular.

In this work it's assumed the plurality of ways of learning, the diversity of spaces where knowledge is constructed, the unique character of the interaction of the individual with its environment, the complexity of success or failure in mathematics and the importance of a basic mathematical culture as a necessary condition for the construction of the Person in today's historical and social context.

This study has a two-fold objective: (a) to analyse and to understand teachers' *personal representations* of problem and problem solving in mathematics education; (b) to explore possible relationships between these *representations* and their *personal philosophies* about mathematics.

Methodologically, this study was organized around two complementary components. A theoretical component, which analysed todays' directions of mathematical philosophy, and the meanings of the terms *problem* and *problem solving*. The thoughts presented in the first and second parts of this study were organized around this component. Another component was constituted by the analysis and interpretation of data collected through semi-structured interviews of teachers of mathematics teaching 7^{th} through 12^{th} grades.

In this second component, it is presented evidence suggesting that the interviewed teachers have diferent meanings for problem and problem solving witch affect the role and place each teacher gives to problem solving. The relationships between their *personal philosophies* about mathematics and the *personal representations* of problem solving are complex, involving simultaneously mathematical and non mathematical factors. It is also found that they claim predominantly *personal philosophies* of absolutist tendency for mathematics.

Índice de Matérias

Índice de Matérias

Volume 1

Introdução Geral ao Estudo

Primeira Parte
Epistemologia da Matemática

Segunda Parte

Resolução de Problemas: Que Rumos para a Educação Matemática?

Terceira parte
O Sentido de Resolução de Problemas

Introdução Geral ao Estudo

Introdução Geral ao Estudo

1 - Preâmbulo

Tanto quanto me lembro, recordando os meus tempos de aluna, a relação que estabeleci com a matemática sempre foi especial e diferente daquela que experimentei relativamente às outras disciplinas escolares. Embora não sendo capaz de explicitar claramente o porquê dessa diferença, recordo o tempo de aprendizagem da matemática, na Escola, como um espaço de liberdade em que o poder 'brincar' com as regras daquele jogo e descobrir, com alguma segurança, os caminhos a seguir quando enfrentava um problema, lhe conferiam um carácter lúdico muito agradável.

Contudo, ao longo dos anos em que a minha experiência profissional se orientou por preocupações de carácter educativo - primeiro formação matemática de jovens e depois formação de professores - fui-me dando conta, cada vez com mais acuidade, de que o meu gosto pela matemática não era compartilhado por muitos alunos: o que eu considerava ser um espaço de liberdade era, frequentemente, sentido por eles como um espaço de constrangimento, e insucessos repetidos, medos, sentimentos de aversão, desinteresse e demissão faziam parte da história escolar de muitos.

Começaram então a surgir-me questões relacionadas com o porquê de tão altos níveis de insucesso em matemática na Escola, insucesso esse que recusava (e recuso) aceitar passivamente como inerente à própria disciplina ou justificado por 'maus' ambientes sócio-económicos, incapacidades, preguiça e falta de atenção. E se reconhecia, nalguns casos, a existência de preguiça e falta de atenção, permaneciam as questões de porque é que elas aconteciam, de porque se distraíam os alunos tão facilmente.

Aliás, uma das coisas que sempre me surpreendeu foi o facto do insucesso em matemática não causar espanto. Apesar de, muitas vezes, ser considerado imperdoável o desconhecimento, por exemplo, de factos da História nacional, é grande a compreensão por quem 'confessa' ter dificuldades em matemática (mesmo ao nível mais elementar), por quem não gosta, por quem diz não saber nada mas também não querer saber. Ser 'péssimo em matemática' parece constituir uma confissão de fracasso que tem o dom de despertar a simpatia de muita gente e não raras vezes o insucesso é encarado quase como uma fatalidade, como se de uma herança genética se tratasse.

Com o decorrer do tempo fui-me, também, apercebendo de que a matemática, enquanto objecto social, não é um objecto neutro. Desperta não só nos alunos mas também nos professores, nas famílias, no cidadão em geral, sentimentos ambivalentes e, nalguns casos, contraditórios.

Por vezes, provoca admiração, podendo "o sucesso numa certa forma de actividade matemática" (1) ser visto, como indica Diatkine, como "um sinal iniciático por excelência (...) que assegura neste país uma carreira brilhante" (1); outras vezes, e em muita gente, suscita sentimentos de medo, angústia e rejeição. A matemática é "correntemente identificada com a razão" (2), olhada como uma disciplina selectiva, abstracta, difícil, apenas acessível a alguns (3), sendo, frequentemente, considerado natural que, para a compreender, se deva possuir a "bossa da matemática" (4).

Se por um lado, considero que, apesar da matemática ser objecto de uma *representação social* comum a muita gente, ela singulariza-se em cada sujeito, que a vive de forma única, por outro, penso, como Papert (5), que há, na nossa cultura, crenças relativas à aprendizagem que são referidas como superstições e que, como superstições, criam um universo de tabus quanto à faculdade de aprender. Muito frequentemente estas crenças relacionam-se com dificuldades de aprendizagem em matemática.

E se para alguns alunos, quando estas dificuldades começam o que importa é o processo pelo qual os pais, professores e sociedade lhes vão reagir e o sentido que eles vão dar às palavras ouvidas, considero, igualmente, que uma *representação social* evidenciando uma matemática difícil, só para alguns, abstracta e despersonalizada, pode ter efeitos destrutivos sobre o potencial matemático de muitos outros alunos. Tal *representação* poderá contribuir para que alguns se convençam firmemente de que não podem aprender matemática e, por isso, encontrem sempre um meio de aí terem insucesso, como se seguissem processos de auto-sabotagem.

No entanto, aceitar-se a normalidade de uma demissão precoce da aprendizagem da matemática é incompatível com o tempo necessário à construção pelos alunos, na Escola, do conhecimento matemático necessário, não só para para que possam escolher livremente e sem restrições opções profissionais futuras, mas também para que possam compreender e intervir crítica e criativamente no mundo em que vivemos.

Com efeito, a matemática tem vindo a assumir uma importância crescente na nossa sociedade. Cada vez mais penetra em nossas casas aquilo a que alguns chamam 'cultura científica' (através de jornais, revistas, rádio, televisão) e, juntamente com ela, a matemática. Se se quiser ler um artigo político ou económico é muito provável que tenha que se lidar com gráficos e variáveis. Se, por um lado, há cada vez mais profissões em que se exige, como condição de acesso, formação matemática, por outro, o uso crescente, em múltiplos campos, de estatísticas, dados numéricos, etc. impõe que todo o cidadão, para que possa ser verdadeiramente autónomo e crítico, possua essa formação, sem a qual fica à mercê do domínio dos números reverenciando a ideia de que eles falam por si só e nunca mentem.

Assim, todo o cidadão para poder ter acesso, na sua plenitude, a um vasto mundo de conhecimento científico e tecnológico, necessita de possuir uma cultura matemática de base que lhe permita interpretar e compreender criticamente a matemática subjacente a inúmeras situações do dia a dia, que lhe permita resolver problemas e tomar decisões razoáveis acerca de múltiplos aspectos que afectam a sua vida e em que a matemática está presente.

Deste modo, impõe-se, cada vez mais, que a Escola proporcione a todos os alunos oportunidades para que aí possam aprender matemática de maneiras significativas e úteis para si próprios e para a sociedade. E se "o professor está no coração do processo educativo" (6), impõe-se, cada vez mais, a compreensão das condições necessárias para que possa ajudar cada aluno a encontrar, em contextos escolares, lugar para a sua originalidade quanto aos processos de aprender matemática.

É neste contexto que se inscreve, primeiramente, a pertinência da investigação que agora apresento: o desejo de compreender quais as condições favoráveis à construção, por cada Pessoa, na Escola de uma cultura matemática de base possibilitadora de um crescimento em autonomia. É, pois, nestas motivações que se situam muitas das razões da opção por desenvolver, no âmbito de um Mestrado em Educação e Desenvolvimento, uma investigação na área da educação matemática.

Consciente dos limites deste trabalho apresento-o como mais um contributo para a compreensão dos processos pelos quais o professor poderá ajudar cada aluno a encontrar, na Escola, condições cada vez mais propícias ao encontro de sentido para a matemática.

2 - Apresentação Geral do Estudo

2.1 - Pertinência

A Escola, tal como hoje está organizada, é produto da idade industrial. Aqui o modelo de organização laboral é hierárquico, executando o trabalhador uma série de operações sob controlo rígido e tendo pouco espaço para a sua iniciativa pessoal (7). No entanto, estamos actualmente no que pode designar-se por *sociedade de aprendizagem e informação*, em que, a escolaridade convencional obtida em fases iniciais da vida, é apenas o princípio de uma longa escola que se prolongará por toda a vida.

Nesta moderna e complexa sociedade, em que as mudanças são rápidas e constantes, a informação tende a desactualizar-se muito depressa, sendo difícil prever, com certeza, quais as habilitações necessárias à formação dos jovens no futuro. Torna-se, pois, particularmente relevante, como refere Húsen (8), que um indivíduo possua um pensamento crítico e desenvolva capacidades de aprender por si próprio, de comunicar com outros seres humanos e de resolver problemas individualmente ou em cooperação.

Barata e Ambrósio acentuam a importância da Escola, actualmente, proporcionar as condições necessárias para o desenvolvimento daqueles "elementos de flexibilidade, ductilidade e atitude perante a mudança que são essenciais para não danificar irremediavelmente os jovens que viverão numa sociedade muito móvel" (9).

O desenvolvimento do raciocínio e do pensamento poderoso e flexível, que sempre foi um objectivo da Educação nos sistemas educativos para a elite, tornou-se hoje, como salienta Resnick (10), um dos objectivos básicos para todos. Utilizando uma expressão de Nisbet e Davies, emerge a "democratização do pensar", incluindo no 'pensar' a capacidade de resolver problemas (11).

Logo, um dos grandes desafios que hoje se coloca à Educação em geral, é o de como proporcionar que, na Escola, sejam atingidos, por todos os alunos, objectivos tradicionalmente reservados a elites.

Quer a nível nacional, quer internacional, diversos relatórios, projectos, associações profissionais e investigadores, apontam a necessidade de renovar o currículo de matemática, pondo a ênfase na importância da resolução de problemas. Na verdade, em vários campos, parece estar largamente difundida a ideia de que o desenvolvimento, pelos alunos, da capacidade de resolver problemas, é o principal objectivo da educação matemática.

Portugal não é alheio a estes desafios. Vive-se actualmente um tempo de importantes mudanças curriculares. A Associação de Professores de matemática, numa publicação editada pela primeira vez em 1988, indica a resolução de problemas "como uma linha de força que, 'atravessando' todo o currículo, oriente a definição dos seus objectivos, a proposta de metodologias, a selecção dos conteúdos e processos de avaliação" (12). Posteriormente, em 1991, nos novos currículos de matemática do 2º e 3º Ciclos do Ensino Básico integrados na actual Reforma do Sistema Educativo, é indicado que "o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas é um eixo organizador do ensino da matemática" (13).

No entanto, é amplamente reconhecido que o sucesso dos alunos na área da aprendizagem da resolução de problemas, está longe de ser o desejável. Igualmente salientado, é o facto de que para muitos professores trabalhar com os alunos em resolução de problemas, "enquanto estes desenvolvem a arte de resolver problemas, ser precisamente a sua tarefa mais difícil, a tarefa em que se sentem menos confiantes e mais desconfortáveis" (14).

Assim, um dos grandes desafios que diversos educadores matemáticos têm enfrentado, tem sido, e continua a ser, o de como ajudar os professores a tomar decisões informadas acerca da organização das actividades de ensino e aprendizagem na sala de aula, de modo a possibilitar que os seus alunos desenvolvam a capacidade de resolver problemas.

Uma revisão de literatura em educação matemática indica que a resolução de problemas é, actualmente, um dos mais populares tópicos de pesquisa. Contudo, apesar desta popularidade, a resolução de problemas em matemática "pode considerar-se um 'campo caótico' no qual o progresso tem sido bastante lento" (15).

Foram realizados, entre outros, inúmeros estudos tanto sobre as características dos resolvedores de problemas e das tarefas-problema, como sobre a eficácia de métodos de ensino desenhados para desenvolver o pensamento global e processos de raciocínio, competências específicas e heurísticas gerais ou específicas. No entanto, porque o objectivo da maior parte destes estudos era comparar a eficácia destes métodos, houve tendência para controlar a variável professor (16). Como resultado, pouca atenção tem sido dada à forma como o professor concebe a resolução de problemas relativamente ao currículo de matemática (17).

Ora, numa época em que o pêndulo educativo balança de uma ênfase nas técnicas de cálculo para uma ênfase no pensamento crítico e na resolução de problemas, em que as salas de aula são frequentemente consideradas sistemas socialmente organizados, e não somatórios de acontecimentos discretos, torna-se particularmente pertinente valorizar o professor, enquanto sujeito activo, que age com intencionalidade própria, que interpreta de forma pessoal e única as situações que se lhe apresentam, e que toma decisões de acordo com o sentido que atribui a essas situações.

Thompson (18) refere que, ao trabalhar com professores na área da resolução de problemas, algumas das grandes dificuldades que encontrou se relacionam com perspectivas destes acerca do que constitui um problema em matemática, bem como acerca da natureza da matemática em geral e da resolução de problemas em particular. E Ernest (19) coloca a hipótese da interpretação que cada professor concede a resolução de problemas relativamente à matemática escolar, ser fortemente influenciada pela sua concepção sobre a natureza da matemática.

Assim, uma das linhas de análise que parece ser adequada à compreensão de como conceptualizam os professores de matemática a *resolução de problemas* no âmbito da educação matemática, é o estudo do sentido que atribuem a *problema* e *resolução de problemas*, bem como a compreensão das suas *representações pessoais* sobre a natureza da matemática.

Ter em conta as *representações pessoais* dos professores representa uma abordagem dos fenómenos que não se interessa exclusivamente pelos factos e comportamentos directamente observáveis. Supõe que a realidade é sempre apercebida de forma única por cada pessoa e reconhece a pluralidade de interpretações possíveis dessa mesma realidade. Valoriza-se, assim, o professor enquanto sujeito interpretativo, em detrimento do professor enquanto sujeito informativo, isto é, receptor e transmissor de saberes já constituídos.

2.2 - Objectivos e questões de investigação

Pretende-se, com este estudo, contribuir para a compreensão de como os professores de matemática interpretam a *resolução de problemas* no contexto da matemática escolar em geral e no contexto do desenvolvimento dos alunos em particular.

Como pressupostos deste trabalho estão o reconhecimento da pluralidade dos modos de aprender, da diversidade dos espaços onde o conhecimento se constrói, do carácter único da interacção da pessoa com o meio em que vive, da complexidade do fenómeno do sucesso ou insucesso em matemática e da importância de uma cultura matemática de base como condição necessária, no actual contexto histórico e social, à construção da Pessoa (20).

A investigação não pretende encontrar ou testar um modelo de ensino ou programa de intervenção a fornecer aos professores para que estes possam ensinar os seus alunos a resolver problemas. Procura, antes, explorar possíveis ligações entre epistemologia da matemática, a problemática pedagógica da *resolução de problemas* no domínio da educação matemática, os processos de estruturação e produção do conhecimento científico considerados, por cada professor, como mais adequados ao ensino e aprendizagem da matemática e ao que se pretende do ensino enquanto processo de desenvolvimento pessoal.

Neste âmbito, os objectivos da presente investigação são pesquisar e compreender as *representações pessoais* dos professores relativas a *problema* e *resolução de problemas*, no âmbito da educação matemática, bem como explorar possíveis relações entre estas *representações* e as suas *filosofias pessoais* sobre matemática.

É neste contexto que se situa a problemática desta investigação centrada em torno de duas grandes questões:

• Que sentido (21) atribuirão os professores de matemática a *problema* e *resolução de problemas* no âmbito do ensino e aprendizagem da matemática?

• Que relações existirão entre possíveis interpretações de *resolução de problemas* e as *filosofias pessoais* sobre matemática sustentadas pelos professores?

No plano metodológico, este estudo foi organizado em torno de dois eixos, diferentes, mas complementares.

Um eixo teórico, em que se analisaram actuais direcções na filosofia da matemática e se procurou compreender os significados de *problema* e *resolução de problemas*. Foi este eixo que organizou e serviu de base à reflexão apresentada na primeira e segunda partes deste estudo.

Um outro eixo foi a análise e interpretação de dados de terreno recolhidos através de entrevistas semi-estruturadas, realizadas junto de professores de matemática que leccionam esta disciplina ao nível do 3º Ciclo do Ensino Básico ou Ensino Secundário. Relativamente a quatro desses professores, e tendo por referência o quadro teórico apresentado, procurou-se compreender as suas *representações pessoais* relacionadas com as questões em estudo.

Estes dois eixos não originaram pesquisas rigidamente sequenciais e separadas no tempo. Constituíram, antes, preocupações simultâneas e integradas, cuja interacção conduziu, quer ao aprofundamento de questões teóricas, quer a uma nova fase de análise e interpretação dos dados recolhidos.

2.3 - Estrutura

Este estudo apresenta-se organizado em três partes, cada uma das quais estruturada em dois capítulos.

A primeira parte centra-se em epistemologia da matemática.

Diversos investigadores têm salientado que controvérsias acerca do ensino da matemática não podem ser resolvidas sem se reflectir sobre questões relativas à natureza da matemática e se desafiar perspectivas sustentadas por alunos, professores e educadores em geral, sobre a natureza desta ciência e do seu ensino e aprendizagem (22). Nomeadamente Hersh (23), referindo-se, em particular, ao formalismo, chama a atenção para o facto de que os argumentos pedagógicos em que inicialmente se basearam as críticas a esta posição filosófica nas escolas secundárias, serem inconclusivos, se se deixar inquestionado o dogma de que a matemática real é precisamente a derivação formal de axiomas formalmente estabelecidos.

Assim, ao pretender-se analisar o papel e lugar da resolução de problemas no âmbito do ensino e aprendizagem da matemática, pareceu importante, antes de mais, pesquisar de que modo a compreensão da natureza da actividade matemática poderia informar os actuais esforços para pensar sobre que experiência matemática deve ser proporcionada aos alunos nas escolas, de modo a que possam aprender uma matemática relevante para si próprios e para a sociedade.

Nesta primeira parte do estudo, parte-se, num primeiro capítulo, de uma reflexão e questionamento sobre perspectivas filosóficas que olham a matemática como o domínio do conhecimento a priori, eterno, certo e imutável e procura-se, num segundo capítulo, analisar novas direcções em que actualmente se desloca a filosofia da matemática. Esta análise é tanto mais pertinente quanto se pensa que, não há muitos anos, "a filosofia da matemática experimentou, fazendo uma analogia entre a matemática e a ciência, o que Kuhn poderia caracterizar como uma mudança revolucionária ou a criação de um novo paradigma" (24).

Na segunda parte do estudo, procura-se aprofundar a compreensão da problemática da resolução de problemas, quando perspectivada no âmbito da educação matemática. Um primeiro capítulo foca, inicialmente, o objecto da resolução de problemas, ou seja o próprio conceito de problema e as suas múltiplas faces, e termina com uma reflexão sobre possíveis papéis que a resolução de problemas poderá desempenhar relativamente ao currículo escolar de matemática. Num segundo capítulo, são exploradas possíveis vertentes do significado de *resolução de problemas enquanto via educativa* para o ensino e aprendizagem da matemática.

Na terceira parte do estudo procurar-se-á pesquisar e compreender perspectivas filosóficas sobre a natureza da matemática e perspectivas de ensino sustentadas por professores.

Num primeiro capítulo, apresenta-se uma revisão de literatura de investigação relacionada com esta problemática. O segundo capítulo, constitui a contribuição empírica deste estudo para o estado da investigação nesta área. Numa primeira secção, (a) indica-se o significado atribuído, no presente trabalho, às expressões *representação pessoal, filosofia pessoal* sobre a matemática e *representações pedagógicas* relativas à resolução de problemas, (b) refere-se o tipo de investigação adoptada e (c) descreve-se a metodologia de recolha de dados de terreno escolhida. Numa segunda secção, relativamente a quatro professores, apresenta-se a análise dos dados considerados relevantes tendo em conta os objectivos da presente investigação. Finaliza-se a terceira parte do estudo, com a apresentação de uma síntese interpretativa das *representações pedagógicas* destes professores relativas à *resolução de problemas*, bem como das relações entre estas *representações* e as *filosofias pessoais* que sustentam relativamente à matemática.

Notas

(1)[1] NIMIER (J.), 1988, Les Modes de Relations aux Mathématiques, Paris, Méridiens Klincksieck, p.19.

(2) MAISONNEUVE (J.), 1988, "Préface" in NIMIER (J.), ibid, p.7.

(3) A ideia de que a matemática não é para todos não é recente. Ubiratan d'Ambrósio, por exemplo, chama a atenção para que já na época de Newton o educador inglês Isaac Watts referia no seu "Discourse on the Education of Children and Youth" que "eu de maneira nenhuma recomendaria para todos o estudo dessas ciências (matemáticas)... Isto não é necessário nem adequado para todos os estudantes mas apenas para aqueles poucos que devem fazer desses estudos sua profissão principal e negócio de vida, ou aqueles cavalheiros cujas capacidades em poder da mente são adequados para esses estudos".
Ver D'AMBROSIO (U.), 1986, Da Realidade à Acção, Reflexões sobre Educação (e) Matemática, São Paulo, Summus Editorial, p. 37.
A imagem da matemática como selectiva, difícil, rigorosa e abstracta é destacada por diversos autores entre os quais se encontram, nomeadamente, Burton, Leder, Lerman, Nimier e Papert.
Ver, por exemplo:
• BURTON (L.), 1989, "Mathematics as a Cultural Experience: Whose Experience?" in Mathematics Education and Society, Document Series No. 35, Paris, Unesco, pp.16-19;
• LERMAN (S.), 1989, "A Social View of Mathematics - Implications for Mathematics Education" in Mathematics, Education and Society, Document Series No. 35, Paris, Unesco, pp.42-44;
• LEDER (G.), 1989, "The Image of Mathematics and Society: A Case Study" in Mathematics, Education and Society, Document Series No. 35, Paris, Unesco, pp. 40-42;
• NIMIER (J.), 1988, op. cit.;
• PAPERT (S.), 1981, "Mathophbie: L'Horreur d'Apprendre" in Jaillissement de l' Esprit-Ordinateurs et Apprentissage, Flammarion, pp.53-73.

(4) Upinsky a propósito da "bossa da matemática" refere que no século XIX, a equação verdadeiro = localizável (proveniente de Descartes e do tipo de raciocínio que ele propôs) tornou-se fundamental. Por exemplo, negar a alma não colocava nenhum problema: bastava constatar que ela não tinha lugar. No entanto os sucessores de Descartes não podiam negar a inteligência. Assim, procuram a todo o custo localizar as faculdades num ou noutro ponto do cérebro. A descoberta da famosa "bossa da matemática" foi um episódio desta aventura.
Ver, UPINSKY (A.-A.), 1985, La Perversion Mathématique, L'Oeil du Pouvoir, Mónaco, Editions du Rocher, p.59.

(5) PAPERT (S.), 1981, op. cit.

(6) OCDE, 1989, "Groupe de Travail sur la Situation des Enseignants, Project de Rapport Général", ED/WP 1 (89), Paris, p.4.

(7) Por exemplo, na p.3 da publicação *Curriculum and Evaluation for School Mathematics* pode ler-se:
"Schools, as now organized, are product of the industrial age. In most democratic countries, common schools were created to provide most youth the training needed to become workers in fields, factories, and shops."
Ver NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 1989, Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Reston, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics.

(8) HUSÉN (T.), 1989, "Integração da Formacão Geral e Formação Profissional- Uma Perspectiva Internacional" in Formação Profissional 1, p.12

(9) BARATA (M.), AMBRÓSIO (T.), 1988, Desafios e Limites da Modernização, Série Modernização, Instituto de Estudos para o Desenvolvimento, Lisboa, p.87. A citação é extraida por estes autores de um estudo de N. Caccace, "Attivitá e Professioni Emergenti", publicado em 1987.

[1] A convenção adoptada no presente estudo para apresentar as notas bibliográticas é a seguinte:
• Final da Introdução Geral ao Estudo;
• final das introduções e conclusões das três partes que o constituem;
• final de cada um dos capítulos em que que estas três partes estão estruturadas;
• após as Considerações Finais ao estudo.

(10) Referido por PUTNAM (R.), LAMPERT (M.) e PETERSON (P.), 1990, "Alternative Perspectives on Knowing Mathematics in Elementary Schools" in Review of Research in Education, 16, C. Cazden (Ed.), Harvard University Graduate School of Education, Washington, American Education Research Association, p.59.

(11) NISBET (J.), DAVIS (P.), 1990, "The Curriculum Redefined: Learning to Think - Thinking to Learn" in Research Papers in Education, Vol. 5, No. 1, p.54.

(12) ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA, 1990, Renovação do Currículo de Matemática, 3ª edição, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, p.32.

(13) MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO, 1991, Organização Curricular e Programas, Ensino Básico 2º Ciclo Vol I, 3º Ciclo Vol. I, Reforma Educativa, Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário, Lisboa, Imprensa Nacional-Casa da Moeda, E.P. Por exemplo, no programa de matemática do 3º Ciclo a citação encontra-se na p.194.

(14) CHARLES (R.), 1990, "Teacher Education and Mathematical Problem Solving: Some Issues and Directions" in The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving, third printing, R. Charles & E. Silver (Eds.), Reston, Virginia, Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 265, 266.

(15) PONTE (J. P.), MATOS (J. F.), MATOS (J. M.), FERNANDES (D.), 1992, "Preface" in Mathematical Problem Solving and New Information Technologies, Research in Contexts of Practice, J.P. Ponte, J.F. Matos, J.M. Matos, D. Fernandes (Eds.), NATO ASI Series, Series F: Computer and Systems Sciences, Vol. 89, Berlin, p.v.

(16) Ver, por exemplo:
• THOMPSON (A.), 1985, "Teachers' Conceptions of Mathematics and the Teaching of Problem Solving", in Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives, E. Silver (Ed.), Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, p.281;
• SILVER (E.), 1985, "Research on Teaching Mathematical Problem Solving: Some Underrepresented Themes and Needed Directions", in Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives, E. Silver (Ed.), Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, pp.248,262.

(17) Esta ideia é referida, nomeadamente, por:
• GROUWS (D.), 1985, "The Teacher and Classroom Instruction: Neglected Themes in Problem-Solving Research", in Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives, E. Silver (Ed.), Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, p.297;
• COONEY (T.), 1985, "A Beginning Teacher's View of Problem Solving" in Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 16, No. 5, National Council of Teachers of Mathematics, p.324.

(18) THOMPSON (A.), 1990, "Learning to Teach Mathematical Problem Solving: Changes in Teachers' Conceptions and Beliefs" in The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving, third printing, R. Charles & E. Silver (Eds.), Reston, Virginia, Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics, p. 234.

(19) ERNEST (P.), 1992, "Problem Solving: Its Assimilation to the Teacher's Perspective" in Mathematical Problem Solving and New Information Technologies, Research in Contexts of Practice, J.P. Ponte, J.F. Matos, J.M. Matos, D. Fernandes (Eds.), NATO ASI Series, Series F: Computer and Systems Sciences, Vol. 89, Berlin, pp.287-300.

(20) Por Pessoa entende-se o Sistema-Pessoa referido por LERBERT (G.), 1981, Une Nouvelle Voie Personnaliste: Le Système-Personne, U.N.M.F.R.E.O., Éditions Universitaires, Maurecourt, p.22-53.

(21) Orofiamma (R.), citando René Barbier, considera o conceito de *sentido* na tripla acepção de significado, direcção e sensação/sensibilidade (signification, direction e sensation). Ver OROFIAMMA (R.), 1990, "Les competences de 3ᵉ dimension, nouvelle intelligence des situations professionneles?" in Les Competences de 3ᵉDimension, Ouverture Professionnelle?, Conservatoire National des Arts et Metiers, Centre de formation de formateurs, p.32.
É nesta tripla dimensão que *sentido* é aqui considerado. Neste contexto, o *sentido* atribuído por cada pessoa a um objecto, fenómeno ou procedimento, decorre das suas *representações pessoais*, faz parte integrante do seu mundo próprio e visa estabelecer uma coerência entre ela própria e o mundo que a rodeia.

(22) Entre esses investigadores encontram-se, por exemplo:
• ERNEST (P.)
- 1991, The Philosophy of Mathematics Education, Hampshire, The Falmer Press;
-1992, op. cit.;
• HERSH (R.), 1986, "Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics" in New Directions in the Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, pp.9-28;
• LERMAN (S.), 1983, 1983, "Problem-solving or Knowledge-centred: The Influence of Philosophy on Mathematics Teaching" in International Journal of Mathematics Education in Science and Techonology, Vol. 14, No. 1, pp.59-66;
• RENÉ THOM, citado por LERMAN, ibid, p.60.

(23) HERSH (R.), ibid, p.13.

(24) TYMOCZKO (T.), 1986, "Introduction" in New Directions in the Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, p.xiv.

Primeira Parte
Epistemologia da Matemática

Primeira Parte - Epistemologia da Matemática

Introdução à Primeira Parte

"aquele algo por vezes claro... e por vezes vago... que é a matemática" (Lakatos)

Ao pretender fazer-se um cômputo geral da matemática, "ter uma visão sinóptica que revele os seus factores essenciais e explique como é que os seres humanos são capazes de fazer matemática" (1), torna-se difícil organizar os diversos factores, relativos à ciência e actividade matemática, num todo coerente. De facto, a simples pergunta 'afinal o que é a matemática' tem sido, ao longo dos tempos, objecto de diversas tentativas de resposta. E os problemas acentuam-se quando se pretende identificar os objectos das teorias matemáticas. A matemática é o conhecimento de quê? Esta questão filosófica, apesar de tão antiga quanto a própria matemática, tem gerado, desde sempre, inúmeras controvérsias.

Constitui, pois, um grande desafio conceber um balanço que abarque a complexidade e o carácter multifacetado da matemática enquanto actividade e corpo de conhecimentos.

Ernest (2) refere que as perspectivas epistemológicas tradicionais, relativas à matemática, procuravam responder a questões relacionadas com a natureza, a existência e os fundamentos do conhecimento matemático (adquirindo, por vezes, as respostas a estas questões, um carácter prescritivo e não descritivo) bem como estabelecer a certeza desse conhecimento. No entanto, diz o mesmo autor, uma reflexão sobre a matemática limitada a estas questões falha em localizar esta ciência num contexto mais amplo do pensamento humano e da história, pondo em risco de esvaziar de conteúdo a sua própria filosofia.

Se a matemática for descrita "em termos dos seus conceitos, características, história e práticas" (3), o âmbito da filosofia poderá alargar-se para lá de preocupações apenas relativas à lógica interna de produção do conhecimento matemático, de modo a poder perspectivar, também, a actividade matemática, como parte integrante da cultura humana em geral. Deste modo abre-se espaço para que a filosofia da matemática, para além de reflectir sobre questões internas relativas ao conhecimento matemático, sua existência e justificação, se debruce também sobre questões externas que se referem, nomeadamente, a origens históricas e contextos sociais de produção desse conhecimento.

Esta primeira parte do estudo tem por finalidade reflectir sobre filosofia da matemática, procurando enquadrar esta dupla ambivalência relativa a aspectos internos e externos. A apresentação, embora breve, de tópicos diversos relativos ao desenvolvimento histórico da matemática, constituirá um fio condutor que contextualizará os aspectos focados e as questões levantadas.

Procurar-se-á, num primeiro capítulo, reflectir sobre epistemologia da matemática, centrando a atenção nos elementos que, de algum modo, constituem a referência objectiva do saber matemático.

Afinal o que é a matemática? Qual a génese e natureza dos objectos matemáticos? Como se produz o saber matemático e qual o papel dos seres humanos nessa produção? Existirão fundamentos certos e seguros para esta ciência?

Estes são alguns dos aspectos sobre os quais se procurará fazer, num primeiro capítulo, uma reflexão organizada que poderá ajudar a olhar a matemática segundo perspectivas e ângulos diferenciados e possibilitar, assim, um melhor entendimento do seu todo, para que melhor possa compreender-se o que dela faz parte.

Num segundo capítulo, procurar-se-á reflectir sobre novos desafios que, actualmente, se colocam à filosofia da matemática, enquadrando-os em reflexões filosóficas sobre a ciência em geral desenvolvidas por Popper e Kuhn.

De facto, neste século, diversos investigadores reconheceram que falhou a tentativa de estabelecer um corpo, universalmente aceite e inteiramente certo e lógico, para a matemática. A filosofia desta ciência foi marcada por uma revolução epistemológica que se traduziu no reconhecimento da natureza social e relativa da matemática. Neste contexto, procura-se olhar a matemática sem a preocupação dominante da pesquisa de fundamentos seguros, tentando-se, em lugar disso, (re)caracterizar a experiência matemática a partir da análise da prática real dos matemáticos.

Assim, este segundo capítulo terminará com a análise de alguns aspectos da actividade e experiência matemáticas. Tendo por base reflexões feitas por diversos matemáticos sobre a actividade de produção matemática, procurar-se-á examinar esta ciência olhando-a do ponto de vista de quem a faz, ou seja, de quem, de algum modo, tenta compreender, (re)criar, (re)construir, (re)descobrir, (re)inventar através de uma forma original para todos, ou, pelo menos, para si próprio, algum raciocínio ou problema matemático.

Notas

(1) TYMOCZKO (T.), 1986, "Introduction" in New Directions in The Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, p.xiii.

(2) ERNEST (P.), 1991, The Philosophy of Mathematics Education, Hampshire, The Falmer Press, p. 24.
Este autor refere, particularmente, o programa fundacionista (movimento da comunidade matemática e filosófica que ocorreu nos finais do século XIX, inícios do século XX, cujo objectivo fundamental era encontrar fundamentos consistentes para a matemática) como uma tentativa de prescrição, e não descrição, de aspectos diversos relativos à natureza da matemática.
Na secção 3 do primeiro capítulo explicitar-se-ão as causas e objectivos deste programa.

(3) Ibid, p.25. O autor aprofunda esta temática nas pp. 25-27.

Capítulo I - O saber matemático

Nota introdutória

Este capítulo centrar-se-á, não tanto no sujeito cognoscente, no indivíduo que assimila e (re)constrói a informação matemática que lhe é exterior e produz novo conhecimento, mas antes nos elementos que constituem a referência objectiva (1) do saber matemático.

Inicia-se com a tentativa de encontrar uma definição para matemática que precise, de uma forma clara e inequívoca, o que esta ciência tem sido ao longo dos tempos. No entanto, muito rapidamente se conclui que tal tarefa é inglória, uma vez que a matemática não se tem mantido igual a si própria.

Procura-se, em segundo lugar, olhar esta ciência a partir de outros níveis de abordagem que, de algum modo, evidenciem aspectos considerados relevantes para a compreensão da sua multiplicidade, complexidade e diferença. Assim, tendo por contexto elementos relativos ao desenvolvimento histórico da matemática, reflecte-se, em seguida, sobre a natureza dos objectos matemáticos, analisa-se o papel da experiência e da razão na produção do conhecimento matemático, interrogando-se, nomeadamente, o carácter *a priori* deste conhecimento, e questiona-se a intemporalidade e carácter absoluto atribuídos frequentemente à verdade, à certeza e ao rigor matemáticos.

Finaliza-se este capítulo com uma reflexão sobre um período recente, particularmente marcante no desenvolvimento da matemática e, frequentemente, designado por período relativo à *crise dos fundamentos.*

1 - O que é a matemática?

Aceitando que "não há (...) oposição absoluta entre conhecimento científico e senso comum" (2) e que "a oposição ciência/senso comum não pode equivaler a uma oposição luz/trevas" (3), veja-se como o senso comum, frequentemente, 'define' a matemática: para uns é uma linguagem abstracta, para outros um jogo de demonstrações onde a dedução é a imagem de marca. Uma definição pouco sofisticada e adequada, segundo Davis e Hersch, a um dicionário e à compreensão inicial, é a de que a matemática é "a ciência da quantidade e do espaço" (4).

Como ciência da quantidade e do espaço ou, na sua forma mais simples, como aritmética e geometria, foi ensinada na Escola durante algum tempo e em certas épocas. Ao nível elementar, em aritmética, estudavam-se números e regras de operações com números. Posteriormente, ensinava-se geometria, que apresentada de acordo com o modelo de Euclides aparecia como uma ciência dedutiva, ou seja, como uma ciência em que, a partir de ideias elementares supostamente evidentes e baseando-se em poucas regras de manipulação matemática e lógica, se construía um conjunto de demonstrações de complexidade crescente.

No século XIX, a ênfase crescente sobre o aspecto dedutivo em todos os ramos da matemática levou Peirce a proclamar que ela "é a ciência de chegar a conclusões necessárias" (5), sem no entanto adiantar nada sobre o conteúdo matemático destas conclusões. Assim encarada, qualquer assunto poderia pertencer-lhe desde que satisfizesse o padrão hipótese-dedução-conclusão. Davis e Hersh (6) referem que Sir Conan Doyle (autor dos livros sobre Sherlock Holmes), poderia muito bem considerar a investigação criminal como um ramo da matemática sem que Peirce pudesse discordar.

Da concepção antiga de ciência do espaço e da quantidade passou-se, posteriormente, à de ciência da forma e da estrutura dedutiva (7).

Ao longo dos tempos muitas outras caracterizações ou 'definições', para a matemática, têm vindo a ser apresentadas:

- Rainha e serva das ciências... (8)
- Ciência do infinito... (9)
- O assunto sobre o qual nunca sabemos de que estamos falando nem se é verdadeiro o que estamos dizendo... (10)
- O mais notável exemplo de um campo em que a razão reina de maneira suprema e em que a emoção não penetra... (11)
- etc.

A matemática não tem permanecido igual a si própria ao longo dos tempos. Pelo contrário, tem sofrido um processo de evolução constante no qual se detectam mudanças profundas nalguns dos seus aspectos mais essenciais. Assim, a sua caracterização vai mudando de acordo com as épocas, as gerações e os matemáticos.

Sistema organizado, linguagem, instrumento, actividade, são diversas perspectivas segundo as quais tem sido encarada esta ciência. Axiomatização, formalização, dedução, são o essencial para alguns e apenas uma parte, nem sequer a mais importante, para outros.

Todas as caracterizações que se pretendem únicas e acabadas são, necessariamente, imperfeitas, redutoras e unilaterais. Assim, à pergunta 'o que é a matemática?', mais do que dar uma definição precisa e acabada importa dar uma resposta dinâmica que, por um lado, não fixe esta ciência num ou noutro momento do seu desenvolvimento, e que, por outro, tenha em conta a multiplicidade dos seus aspectos.

Será uma ciência cumulativa? Qual a natureza dos objectos matemáticos? Como se desenvolve o conhecimento matemático e qual o papel dos seres humanos neste desenvolvimento? Em particular, constituirá a matemática uma ciência empírica? Ou será o conhecimento matemático *a priori* como afirmava Kant? Ter-se-ão mantido ao longo dos tempos os significados de verdade e rigor matemáticos? Poder-se-ão encontrar fundamentos seguros para a matemática? Qual a pertinência de considerar o saber matemático intrinsecamente absoluto, incontestável, verdadeiro e rigoroso? Poderá o desenvolvimento histórico da matemática iluminar a sua filosofia no sentido de analisar esta pertinência?

Estas são, entre muitas, algumas das questões cuja reflexão poderá possibilitar uma compreensão mais profunda da globalidade da matemática. Talvez através delas se possa comprender melhor esta ciência na sua semelhança e na sua diferença relativamente às outras áreas do saber.

Procura-se analisar, em seguida, algumas vertentes destas questões.

1.1 - Matemática, ciência cumulativa?

Aparentemente, a matemática poderia considerar-se uma ciência perfeitamente cumulativa. Tudo o que uma vez foi matemática permaneceria para sempre matemática; um teorema hoje aceite como verdadeiro não seria mais tarde considerado falso.

Dieudonné refere, por exemplo, que "uma vez que a demonstração de um teorema a partir de um sistema de axiomas foi considerada correcta, o teorema nunca mais é posto em causa" (12). Desta maneira, parecerá que esta ciência é um organismo vasto e crescente que se desenvolve por etapas ordenadas, e em que a compreensão da etapa antecedente é necessária à compreensão da etapa consequente.

Na realidade, as coisas não são assim tão simples. O próprio Dieudonné reconhece que a evolução em matemática "não consiste unicamente na acumulação de novos teoremas. Estes não se limitam a sobrepor-se aos antigos, absorvem-nos transformando-os em corolários, que acabam muitas vezes por já nem ser sequer mencionados a não ser pelos historiadores" (12).

Igualmente Davis e Hersch (13) referem que a visão da matemática como ciência cumulativa é algo ingénua. Segundo estes autores, a par de processos de construção, há processos de destruição; descobre-se que factos isolados estão errados ou incompletos; há teorias que são desprezadas por se tornarem impopulares e outras que caem no esquecimento; há trabalhos antigos encarados sob novas perspectivas.

Assim, em matemática, mais do que a uma acumulação de factos e teorias, assiste-se a uma reorganização e integração selectiva, e algo redutora, de resultados anteriores no quadro de teorias cada vez mais amplas e abstractas. O que chega até nós através de livros, artigos de investigação ou outras publicações, é apenas uma pequena parte de toda esta actividade profundamente humana que é o processo de construção do saber matemático.

Pelo caminho ficaram a motivação, o espírito inventivo, as tentativas, os erros, os avanços, os recuos e muitas das aplicações que enriqueceram de significado as ideias originais. Não será nesta exclusão que se enraíza a ideia, tantas vezes explicitada, de que demonstrações e teorias matemáticas são inventadas ou descobertas tal como são formalmente apresentadas por espíritos geniais?

Mesmo partilhando a ideia de que a matemática não é uma ciência cumulativa, permanece a questão de porque é que, durante tantos séculos, inúmeros matemáticos e filósofos atribuíram a esta ciência um estatuto especial e diferente do estatuto concedido a outras áreas do saber. Não é estranho que, mesmo actualmente, o senso comum aponte tantas vezes a matemática como o protótipo da ciência que é abstracção pura e desligada do mundo real?

Afinal qual a razão deste estatuto? Qual a natureza dos objectos matemáticos?

1.2 - Natureza dos objectos matemáticos

Já desde Platão que os matemáticos estão despertos para a ideia de que os objectos sobre os quais raciocinam são "seres imateriais obtidos por 'abstracção' a partir de objectos acessíveis aos nossos sentidos mas de que deles são apenas 'imagens'" (14). Nomeadamente, Euclides não deixa qualquer dúvida quanto ao facto de, por exemplo, ponto, recta, ângulo, círculo e polígono serem, entre outros, objectos matemáticos "visíveis apenas para o pensamento" (15).

Até ao século XIX, os matemáticos, apesar de reconhecerem a imaterialidade e o carácter ideal dos seres com que trabalhavam, tinham deles imagens acessíveis aos sentidos. No entanto, nesse século, para conseguirem resolver problemas deixados pela matemática clássica foram, segundo Dieudoné, "constrangidos a inventar novos objectos matemáticos e novos métodos" (16). Foi o caso da noção de estrutura que, segundo este autor, derivou da "necessidade de atacar, com sucesso, problemas herdados das matemáticas clássicas" (17).

Com o passar do tempo vão assim surgindo objectos distintos daqueles sobre os quais os gregos raciocionavam, distinção essa baseada, nomeadamente, no facto de eles já não terem imagens acessíveis aos sentidos como tinham os anteriores objectos clássicos.

Um outro prisma de análise sobre a natureza dos objectos matemáticos consiste em olhá-los, na sua relação com o sujeito que os conhece ou procura conhecer, bem como na sua relação com outras ciências.

Para Tymoczko (18), tradicionalmente contrastam-se o que designa por concepções realistas da matemática com concepções construtivistas. Segundo este autor, enquanto o *realismo* supõe a realidade do universo matemático, universo este independente do matemático que descobre verdades acerca dessa realidade, o *construtivismo* insiste em que, toda a realidade matematica é condicionada pelas construções dos matemáticos que inventam essa realidade.

Snapper (19) refere que, na filosofia medieval o realismo tem por base a doutrina platónica, segundo a qual as entidades abstractas são independentes do espírito humano. No âmbito da filosofia da matemática e no que respeita à natureza dos objectos matemáticos, os termos realismo e platonismo são utilizados, frequentemente, para designar perspectivas filosóficas idênticas (20).

"Segundo o platonismo os objectos matemáticos são reais. A sua existência é um facto objectivo, totalmente independente do nosso conhecimento (...) não são objectos físicos ou materiais. Existem fora do espaço e do tempo (...) são imutáveis - não foram criados e não mudarão nem desaparecerão" (21).

Assim, a matemática teria uma existência autónoma, obedecendo a uma lógica e leis internas, consistindo a actividade de fazer matemática na descrição e descoberta desses objectos, bem como das relações que os unem. Quer uns, quer outras, uma vez que são pré-existentes, podem ser descobertos pelo espírito, mas não inventados por este.

A concepção filosófica realista, no sentido de Tymoczko, é designada, neste trabalho, por *platonismo*. Relativamente ao construtivismo, referido por este autor, far-se-ão aqui, sempre que necessário, as distinções consideradas adequadas, quer relativamente ao construtivismo, enquanto programa respeitante à procura de fundamentos para a matemática, quer quanto ao construtivismo, enquanto epistemologia capaz de interpretar uma complexidade de fenómenos relativos à produção de conhecimento.

As considerações tecidas sobre os objectos matemáticos servem para destacar alguns problemas, que embora actuais, foram levantados, desde há muito, por diversos filósofos e matemáticos.

Se se procurar a natureza dos objectos matemáticos na actividade do sujeito, compreender-se-á o rigor dos desenvolvimentos dedutivos e sua fecundidade, mas colocar-se-á o problema do acordo com o real, sobretudo o da antecipação de resultados. Não se compreenderá como é que, apenas através de desenvolvimentos matemáticos, se podem antecipar os resultados da experiência com desfasamento cronológico por vezes considerável (22).

Por outro lado, se se considerar que os objectos matemáticos são da mesma natureza da realidade experimental, compreender-se-á que, uma vez daí extraídos, através de uma série de abstracções cada vez mais requintadas, continuem a estar de acordo com essa realidade. Mas já não se compreenderá tão bem que eles a excedam e que possam obter-se construções dedutivas, bem mais rigorosas do que as observações e sem nenhuma comparação com elas, quanto ao processo de demonstração.

Considerando a possibilidade de os objectos matemáticos se situarem para lá do sujeito e da realidade experimental, num mundo de ideias existente por si mesmo, então ficarão sem resposta os problemas relativos tanto ao acordo com essa realidade, como à adequação do sujeito aos instrumentos dedutivos.

Se se pensar nos resultados matemáticos, coloca-se idêntico problema. Considerando que eles são eternos e indubitáveis, poder-se-á ser levado a olhá-los como descrições verdadeiras de um mundo platónico existente fora do espaço-tempo. No entanto, ficar-se-á com o problema de explicar como é que os seres humanos são capazes de tomar contacto com esse mundo. Em alternativa, poder-se-á abandonar a ideia da existência de um mundo platónico e olhar a matemática apenas como um simples jogo de símbolos formais. Compreender-se-á assim, como é que os seres humanos são capazes de fazer matemática, mas levantar-se-á a questão da utilidade deste jogo na compreensão, interpretação e resolução de problemas colocados pela realidade do mundo em que se vive.

E embora possam considerar-se outros níveis de análise, continuará o problema de estes clarificarem apenas alguns aspectos, deixando outros envoltos em mistério. Assim, o dilema é que diversas considerações sobre a natureza dos objectos matemáticos são bastante plausíveis e, ao mesmo tempo, todas encontram sérias dificuldades.

1.3 - Matemática pura e matemática aplicada

Um outro problema, subjacente à natureza dos objectos matemáticos, surge quando se pensa na distinção entre *matemática pura* e *matemática aplicada*.

Segundo Kline, enquanto em matemática aplicada os problemas a resolver emergem do mundo real, de acontecimentos físicos, de outros ramos da ciência, em matemática pura os problemas são gerados por um movimento de desenvolvimento interno, essencialmente dirigido para a abstracção, generalização, especialização e axiomatização. Assim, a matemática pura faz dela o seu próprio objectivo e o que a caracteriza "é a sua indiferença relativamente a aplicações imediatas ou potenciais" (23).

Dieudoné (24), por seu lado, fundamenta a distinção entre matemática pura e aplicada, referindo que os objectos de que tratam os matemáticos não são da mesma natureza do que os dos físicos ou engenheiros. Este autor acentua que a matemática pura deveria designar-se por matemática, enquanto que a matemática aplicada deveria ser antes denominada *aplicações da matemática.*

Dieudonné explica que se utilizam correntemente nas outras ciências os termos *ciência fundamental* e *ciência aplicada*, para indicar que, a primeira tem por objectivo compreender os fenómenos e a segunda visa o domínio destes fenómenos pelo homem, que constrói, para tal, modelos que os representam. Indica este autor que o termo *fundamental* não é associado à matemática, "mas opõem-se 'matemáticas puras' e 'matemáticas aplicadas', o que pode ser interpretado como deixando entender que há maior diferença entre estas duas partes do que noutras ciências" (24).

No entanto, poder-se-á estabelecer uma clivagem precisa entre a compreensão dos fenómenos matemáticos e o seu domínio e aplicação pelo homem?

Kline chama a atenção para que "os objectos matemáticos, supostamente resultantes de actividade matemática 'pura' e que, posteriormente, se revelaram aplicáveis aparecem, se se tiver em conta a factualidade histórica, como produções cuja finalidade era o estudo de problemas físicos ou problemas directamente ligados a estes" (25).

Além disso, se é um facto que o pensamento matemático comporta abstracção, axiomatização, generalização, três tipos de actividades incluídas na chamada matemática pura, também é verdade que "a abstracção e a generalização não são mais vitais para a matemática do que a individualidade dos fenómenos e a intuição indutiva. Só a interacção entre estas forças pode preservar a matemática e impedir que se transforme num esqueleto morto" (26).

Assim, haverá vantagens e será muito pertinente separar-se, nitidamente, a matemática numa variedade 'pura' e noutra 'aplicada'? Uma das grandes potencialidades da matemática reside exactamente na construção de modelos inteligíveis de fenómenos naturais complexos, e aparentemente impenetráveis, possibilitando, assim, um aumento do poder humano de decisão e intervenção no mundo. Parece ser através da interacção entre a abstracção e os problemas concretos que a vida produz, que se produz e vai construindo uma matemática viva e significativa.

1.4 - Experiência e razão na génese do conhecimento matemático

Uma outra vertente de análise, que poderá contribuir para compreender a razão do estatuto especial que durante muitos séculos foi reconhecido ao saber matemático, diz respeito ao papel do sujeito e, nomeadamente, ao papel da experiência e da razão na sua formação.

Neste âmbito, e quanto ao conhecimento em geral, distinguem-se, tradicionalmente, duas perspectivas filosóficas: o *racionalismo* e o *empiricismo*.

1.4.1 - Perspectiva racionalista

Platão referia o conhecimento matemático como "um exemplo notável de conhecimento independente dos sentidos, de conhecimento de verdades eternas e necessárias" (27). Para o platonismo os objectos matemáticos são, por essência imutáveis, e a sua existência é independente de toda a actividade humana, se bem que o homem possa descobri-los através da "intuição intelectual" (28).

Tal como Platão, também os racionalistas, entre os quais se encontram os filósofos Spinoza, Descartes e Leibnitz, viam a razão como um traço inerente à mente humana, através do qual as verdades podiam ser conhecidas indepententemente da observação (29).

A razão era a faculdade que permitia ao homem conhecer o Bem e o Divino e, para os racionalistas, esta faculdade era mais facilmente visível na matemática. Afinal esta ciência, diziam, partia de verdades auto evidentes, os axiomas, e, através de raciocínios estabelecidos pela razão, conseguia descobrir e chegar a conclusões não evidentes, e por vezes, inesperadas. Assim, a existência da matemática aparece para o racionalismo como um argumento fundamental que evidencia a confirmação e pertinência desta perspectiva filosófica.

O racionalismo foi posteriormente questionado pelo *materialismo* e pelo *empiricismo*. Foi o progresso das ciências da natureza, com base no método experimental, que considerava como únicos meios legítimos de alcançar o conhecimento a experimentação e a observação, que fez triunfar o empiricismo.

1.4.2 - Perspectiva empiricista

Os empiricistas afirmavam que todo o conhecimento tinha por base a observação. O conhecimento matemático era, porém, a excepção que confirmava esta regra. De facto, se para os racionalistas "a matemática era o melhor exemplo para confirmar a sua visão do mundo" (30), para os empiricistas "ela constituia um contra-exemplo embaraçoso, que tinha que ser ignorado ou explicado de alguma maneira" (30).

Stuart Mill, contudo, em meados do séc. XIX, rejeitou o platonismo que, durante séculos, dominou a matemática e propôs para esta ciência o empiricismo. Para este filósofo, as afirmações matemáticas são generalizações indutivas feitas a partir das nossas experiências perceptuais ou observações directas, e dizem respeito a objectos que não pertencem a um universo platónico, mas ao mundo real. No entanto, este filósofo, apesar de salientar o papel da indução e da experiência na formação do conhecimento matemático, não põe em causa a verdade deste conhecimento, uma vez que "supõe a certeza da indução" (31).

No contexto do empiricismo, os trabalhos de David Hume (32) desempenharam um papel filosófico de relevo. Hume defendia que não conhecemos nem o espírito, nem a matéria. Não devemos sequer admitir a existência de outras substâncias, senão daquelas de que temos experiência imediata. Esta experiência reduz-se a um conjunto de sensações e, portanto, todo o nosso conhecimento se baseia e é construído a partir de impressões sensoriais, isto é, de dados que obtemos através dos sentidos.

Para aquele filósofo, uma vez que tudo o que sabemos provém das nossas próprias sensações, oriundas de um possível mundo físico, tudo leva a crer que a existência de um mundo exterior, dispondo de propriedades permanentes, seja uma inferência sem fundamento. Relativamente à matemática, Hume não rejeitou os axiomas relativos a números e figuras geométricas, mas optou por os desvalorizar, tal como fez com os teoremas que deles derivavam, considerando que, quer uns, quer outros eram provenientes de sensações relativas ao presumível mundo físico.

Segundo Kline, a filosofia de Hume não só pôs em causa a existência de leis científicas relativas a um mundo físico, objectivo e permanente, como depreciou os esforços e resultados da ciência e da matemática e, mais que isso, "desafiou o valor da própria razão" (33). Ora, este facto não foi bem aceite pela maior parte dos intelectuais do século XVIII, que consideraram que a filosofia de Hume devia ser refutada. Entre eles encontrava-se Kant.

1.4.3 - Perspectiva de Kant

Kant (34) distinguiu o *conhecimento a priori* do *conhecimento a posteriori*, e o *conhecimento analítico* do *conhecimento sintético*.

Para este filósofo, o conhecimento *a priori* é o conhecimento universal, necessário e intemporal, que se fundamenta na razão e é independente da experiência. Diferentemente, o conhecimento *a posteriori*, ou empírico, consiste em proposições fundamentadas na experiência, isto é, nas observações do mundo físico.

Para Kant, o conhecimento analítico é o conhecimento explicativo. Em particular, o conhecimento *a priori* analítico é "o que sabemos ser verdadeiro por análise lógica, pelo próprio significado dos termos usados" (35). Por outro lado, o conhecimento sintético é aquele que acrescenta algo de novo ao conhecimento que já se possui. No âmbito da matemática, afirmar que 'um segmento de recta é a distância mais curta entre dois pontos', constitui um exemplo de conhecimento sintético *a priori*.

A grande questão filosófica de Kant era saber como são possíveis os conhecimentos sintéticos *a priori* e, em particular, como é possível a existência de conhecimento matemático. A sua resposta a esta questão é a de que o nosso espírito dispõe de formas puras de espaço e de tempo, formas essas que constituem modos de percepção (a que Kant chama intuições), através das quais o espírito percebe, organiza e compreende a experiência.

No entanto, Kant, embora glorificando a razão a que atribui a tarefa de explorar as formas do espírito humano, não nega a importância da experiência e dos dados provenientes da observação. No que respeita à ciência, e dito de uma maneira muito geral, Kant sustenta que ela consiste "numa totalidade de impressões sensíveis ordenadas e controladas pelo espírito segundo categorias inatas como o espaço, o tempo, a causa, o efeito e a substância" (36). O espírito contém, pois, formas às quais se adequam as impressões oriundas do mundo real, mundo esse que apenas pode ser conhecido através de categorias subjectivas fornecidas pelo espírito de cada indivíduo.

Assim, para este filósofo, o conhecimento pode começar com a experiência, mas não pode provir daí. É apenas o espírito de quem procura conhecer que organiza as percepções. Reconhece-se o papel necessário da experiência, uma vez que, as sensações provenientes do mundo exterior, que supomos existir, fornecem material em bruto, que o espírito organiza. Por outras palavras, o conhecimento provém do espírito mas "o poder de conhecimento do espírito é estimulado pela experiência" (37).

A matemática representava, para Kant, a prova suprema da existência de conhecimento *a priori*. Considerava que esta ciência constitui "o exemplo espantoso do que, independentemente da experiência, se pode atingir no conhecimento verdadeiro ou *a priori*," e atribui-lhe a tarefa de "desvendar as leis necessárias do espírito" (38).

Uma vez que a intuição do espaço tem a sua origem no espírito, o espírito reconhece de imediato algumas das propriedades desse espaço. Assim, para Kant, afirmações do tipo "três pontos determinam um plano", ou o axioma das paralelas de Euclides, constituem princípios que designa por verdades sintéticas *a priori*, princípios esses que "fazem parte dos nossos instrumentos cognitivos" (39).

Em suma, para Kant, o nosso conhecimento do espaço é sistematizado na geometria (entendida como geometria euclidiana, a única que Kant conhecia) e, uma vez que os "números inteiros derivam da intuição do tempo" (40), o nosso conhecimento do tempo é sistematizado na aritmética. Logo, as proposições matemáticas são objectivas, necessárias, universalmente válidas, independentes da experiência, e impõem-se-nos pela maneira como a nossa mente funciona.

Esta breve passagem pela filosofia de Kant serve de contexto para evidenciar que este filósofo, ao chamar a atenção para o papel da experiência como estímulo para a produção de conhecimento e, simultaneamente, ao pôr a tónica no poder do espírito como organizador dessa experiência, mais do que refutar a perspectiva filosófica de Hume, "tentou unificar as duas tradições contraditórias do racionalismo e do empiricismo" (41).

Serve ainda para destacar que, nesse processo, Kant, ao colocar a fonte da matemática no poder organizador do espírito, concedeu a esta ciência um estatuto especial, um carácter de necessidade e uma marca de certeza intemporal e incontestável, que se manteve durante séculos. Como referem Davis e Hersh "o dogma kantiano do *a priori* permaneceu como uma influência dominante na filosofia da matemática bem até ao século XX" (42). Para estes autores, as escolas fundacionistas que, no início deste século, tentavam encontrar fundamentos certos e seguros para a matemática, no fundo, procuravam manter esta ciência na posição especial que Kant lhe tinha conferido.

Actualmente, quer o questionamento da natureza *a priori* do conhecimento matemático, quer os argumentos a favor de bases empíricas para este conhecimento estão a ganhar cada vez mais terreno. Não se trata, contudo, de um retorno ao empiricismo de Mill que Ernest designa por *naive empiricism* (43).

De facto, como anteriormente foi dito, este filósofo, embora considerando que o conhecimento matemático era obtido por generalização indutiva a partir da experiência, não punha em causa a sua certeza. Ora, uma das vertentes que hoje se questiona é, precisamente, a existência de um corpo de saber matemático imutável, absoluto e indubitável. Neste âmbito, coloca-se a hipótese de se, tal como qualquer outra ciência, não constituirá a matemática um produto da actividade humana, desenvolvida num tempo e num espaço, produto que, embora fiável, é mutável, falível e corrigível.

Uma forma de reflectir sobre a pertinência desta hipótese é olhar o desenvolvimento histórico da matemática e analisar o significado e o papel que as noções de rigor matemático, verdade matemática e certeza matemática foram tendo, ao longo dos séculos, no contexto da evolução desta ciência.

2 - A verdade e a certeza matemáticas: Perspectiva histórica

2.1 - Origem da matemática

Seguindo Struik, Davis e Hersh, pode dizer-se que, embora as nossas principais concepções de número e forma datem de tempos tão remotos como os do paleolítico, a linha principal da actividade matemática ocidental, enquanto actividade sistemática, tem a sua origem nas civilizações orientais do Egipto e da Mesopotâmia (44).

Assim, a matemática no sentido mais amplo do termo, ou seja, no sentido em que se utilizam números e figuras geométricas, comporta contribuições importantes dos povos antigos do Egipto e Babilónia sobre as quais importa reflectir, ainda que, brevemente.

As matemáticas orientais surgiram com o objectivo de facilitar o cálculo do calendário, a administração das colheitas, a organização das obras públicas e a cobrança de impostos. Quer a aritmética, quer a geometria então desenvolvidas tiveram, pois, as suas origens em problemas práticos relacionados com o dia a dia de uma sociedade agrária já estruturada. Os conceitos que aí intervêm dizem respeito apenas a objectos concretos (como por exemplo a enumeração de objectos de um amontoado ou a medida de grandezas susceptíveis de adição e subtracção) e não a especulações abstractas. Os processos de cálculo são procedimentos relativos a exemplos em que os dados estão explicitados e não são arbitrários. A generalidade destes processos deixa-se apenas adivinhar, quando dela se dá uma série de exemplos em que os dados variam.

Uma vez que estas matemáticas eram apenas praticadas com fins imediatos e práticos, não dispunham de nenhuma metodologia específica. Não era apresentada nenhuma argumentação, mas, somente, a prescrição de certas regras, 'receitas' destinadas a regular os problemas práticos que importava resolver. Indicava-se o 'como fazer', mas não o 'porque fazer'.

Anteriormente aos fragmentos dos autores gregos dos séculos VII e VI A.C., nenhum documento de uma civilização antiga nos permite descobrir exemplos daquilo a que chamamos deduções lógicas. As matemáticas orientais foram-se, assim, constituindo como um utensílio, uma ciência prática, através da acumulação de um conjunto de factos, regras e processos, sem nunca se terem emancipado verdadeiramente da influência milenar dos problemas práticos e administrativos para cuja resolução tinham sido criadas. Embora constituindo um conjunto considerável de conhecimentos, tinham-se desenvolvido numa forma não dedutiva, em que as regras e procedimentos tinham sido descobertos, a partir da observação e experimentação, e através de processos de tentativa e erro.

Kline refere que o melhor que se pode dizer, a propósito das matemáticas destas civilizações, é que manifestavam muito vigor, mas não rigor de pensamento, e muito mais perseverança do que brilho (45).

Foi esta perspectiva empírica e instrumentalista que serviu de prelúdio aos trabalhos matemáticos desenvolvidos pela civilização grega.

2.2 - Origem das verdades matemáticas ou matemática: Chave da Natureza

Uma das grandes ideias originais dos gregos foi a de atribuir às noções matemáticas o carácter de objectos de pensamento.

Os primeiros estudos de matemática grega tinham por objectivo principal compreender o lugar do Homem no Universo de acordo com um esquema racional. A matemática ajudava a encontrar a ordem no caos, a ordenar as ideias em sequências lógicas, a encontrar princípios fundamentais. Foi neste contexto que os sofistas gregos abordaram problemas de natureza matemática como parte de uma investigação filosófica do mundo natural e moral (46).

Refere Kline (47), que efectivamente o que os gregos descobriram foi o poder da razão. Reconheceram que o homem tem uma inteligência, um espírito, que, ocasionalmente, ajudado pela observação e experiência permite estudar, de uma forma racional e crítica, as leis da Natureza e descobrir as estruturas subjacentes a essas leis.

Começou assim a tomar corpo uma nova matemática desenvolvida mais no espírito da compreensão do que no da utilidade imediata. Esta matemática colocava não só a antiga questão do *como* mas também a moderna questão científica do *porquê*.

Contudo, nesta época, não foram só os sofistas que se preocuparam em conceber uma representação matemática da Natureza. Struik (48) indica que existia provavelmente um outro grupo de filósofos interessado nesta questão: a escola pitagórica, dirigida por Pitágoras.

Os pitagóricos sentiram-se impressionados pelo facto de fenómenos muito diversos, de um ponto de vista qualitativo, poderem exibir propriedades matemáticas idênticas. Foram assim despertando para a ideia de que estas propriedades podiam constituir a essência destes fenómenos e que o Universo estava matematicamente ordenado. Consequentemente, a matemática começou a aparecer como um modelo explicativo e inteligível, uma chave por meio da qual o homem podia penetrar na ordem da Natureza e dissipar o mistério e o caos que aí pareciam reinar.

No processo de explicação da Natureza o número, entendido como ponto ou partícula, constituía o primeiro princípio. Os pitagóricos investigavam as suas propriedades e colocavam-no "no centro de uma filosofia cósmica que tentava reduzir todas as relações fundamentais a relações numéricas" (49). "Todas as coisas são números" (50), afirmavam.

Porém, os únicos números que reconheciam como tal, eram os inteiros ou os fraccionários. Assim, a descoberta de que havia relações entre estes números que não podiam ser expressas através deles (por exemplo, a média geométrica entre 1 e 2 constitui um número irracional), pôs em causa a harmonia entre a aritmética e a geometria e originou perturbações nos meios filosóficos e matemáticos.

Esta descoberta, associada aos paradoxos evidenciados por Zenão, que "entravam em conflito com algumas concepções antigas e intuitivas sobre o infinitamente pequeno e o infinitamente grande" (51), levou os matemáticos da época a questionarem-se sobre se a matemática era possível como ciência exacta.

A este propósito, Struik indica que "Tannery sugere que se pode falar 'de um verdadeiro escândalo lógico' - uma 'crise' na matemática grega" (52). Se é este o caso, indica Struik, esta crise foi resolvida no espírito do novo período social da história da Grécia.

Há, contudo, em todo o trabalho desenvolvido pelos pitagóricos duas teses que se viriam a revelar muito importantes, tanto no novo período que se anunciava, como posteriormente. A primeira é a de que a Natureza se comporta de acordo com princípios matemáticos; a segunda é a de que, subjacente à ordem da Natureza, estão relações quantitativas que elas verificam e revelam.

O novo período da história da Grécia foi de supremacia aristocrática. As classes dirigentes tinham a sua subsistência assegurada pela escravatura e todo o tipo de trabalho manual era menosprezado. Foi neste contexto que surgiu e tomou forma a escola mais influente, depois dos pitagóricos, na exposição e propagação da tese relativa à estrutura matemática da Natureza: a Academia de Platão.

Os platonistas distinguiam o mundo das coisas do mundo das ideias. O mundo das coisas, mundo material, continha objectos e relações imperfeitas. No entanto, existia um outro mundo, um mundo ideal, no qual se encontravam as verdades absolutas e imutáveis. Dizia Platão que "as coisas são apenas a sombra das ideias projectadas sobre o écran da experiência" (53). Consequentemente, o saber certo e verdadeiro apenas podia estar neste mundo de formas ideais puras, uma vez que as ideias são imutáveis e todo o saber que lhes diga respeito é seguro e indestrutível.

É neste mundo de ideias que Platão coloca os objectos matemáticos. Assim, para este filósofo, as leis matemáticas não eram apenas a essência da realidade, mas uma essência verdadeira, eterna e imutável.

Se com Pitágoras eram os números que 'governavam' o mundo, com Platão são as ideias geométricas que o governam. "Deus geometriza eternamente" (54); a "geometria tem por objecto o conhecimento do que é sempre e não do que nasce e morre" (54). Estas duas frases, atribuídas a Platão, ilustram bem este facto.

Platão, para lá do reconhecimento da estrutura matemática subjacente à Natureza e do desejo de compreender essa mesma Natureza através da matemática, procurava, diferentemente dos pitagóricos, substituir a Natureza pela própria matemática. Com efeito, para Platão a razão teria a capacidade de intuir verdades fundamentais graças às quais poderia proceder de maneira autónoma. A matemática podia desempenhar esta função de prescrutar a Natureza e substituir-se, assim, à própria investigação física.

Estes aspectos são bem ilustrados pela indignação que Platão demonstrava por alguns dos seus contemporâneos que recorriam a raciocínios mecânicos para provar resultados matemáticos. Para ele, estes métodos corrompiam a geometria, uma vez que utilizavam fenómenos sensíveis em vez de puro raciocínio (55).

Aristóteles, embora discípulo de Platão e compartilhando com ele várias perspectivas, criticava esta tese que reduzia a ciência à matemática. Em lugar dela, sustentava que "as coisas materiais constituíam a substância primeira e o fundamento de toda a realidade" (56), devendo a física, e a ciência em geral, estar ligadas ao estudo do mundo físico.

Tendo por base este rápido olhar sobre as perspectivas filosóficas anteriormente referidas, que modelaram o mundo intelectual dos gregos, há dois aspectos que importa salientar. Em primeiro lugar, no âmbito da matemática, o que realmente houve de mais inovador no pensamento grego foi a sua concepção de um Cosmos, funcionando de acordo com leis matemáticas passíveis de serem descobertas pelo pensamento humano. Em segundo lugar, destaca-se o desejo de conhecer estas leis que consideravam seguramente verdadeiras.

Colocava-se contudo a questão: como descobrir as verdades relativas à estrutura matemática da Natureza e ter a certeza de que são, efectivamente, verdades?

Um dos passos dados pelos gregos, para poder raciocinar sobre conceitos matemáticos abstractos, foi estabelecer axiomas, verdades de uma tal auto-evidência que ninguém poderia negar. Estes axiomas diziam respeito ao espaço e aos números inteiros.

O segundo passo foi garantir a correcção das conclusões obtidas a partir dos axiomas. Para tal, escolheram o raciocínio dedutivo, incluindo Aristóteles, entre os princípios deste raciocínio, o princípio da não contradição e o do terceiro excluído.

Porquê a escolha do raciocínio dedutivo? Uma das razões que Kline (57) aponta para tal facto é a de que, para os gregos, ele era o único raciocínio que garantia a correcção das conclusões. Assim, uma vez que no âmbito da matemática se partia de axiomas, verdades sobre o espaço e os números inteiros consideradas auto-evidentes, este raciocínio, ao garantir a correcção das conclusões, poderia ser um veículo para encontrar as verdades eternas sobre a Natureza e o Homem que os gregos ansiavam descobrir.

Há ainda uma razão de natureza social que poderá explicar a preferência pela forma dedutiva. As actividades matemáticas, bem como as filosóficas e as artísticas, eram praticadas por classes abastadas que menosprezavam o trabalho manual e as actividades comerciais. Platão e Aristóteles, ao sustentarem respectivamente que a actividade comercial constituía uma degradação para o homem livre, que devia ser punida como crime, e que nenhum cidadão devia praticar arte mecânica, ilustram bem, neste domínio, a atmosfera intelectual reinante na época (58). Assim, não é de estranhar a opção pela dedução. Com efeito, a experimentação e observação teriam aparecido como estranhas ao modo de pensar grego.

Os Elementos de Euclides: No período helenístico, o avanço da civilização grega pelas regiões do mundo oriental (Egipto, Mesopotâmia, parte da Índia) possibilitou que a matemática grega, embora conservando muitas das suas características tradicionais, sentisse a influência dos problemas de Administração e Astronomia que o Oriente tinha para resolver (59).

Surgiram os cientistas profissionais e, neste grupo, muitos dos mais importantes representantes viviam em Alexandria, centro intelectual e económico do mundo helenístico.

Entre os primeiros sábios, associados a Alexandria, destaca-se Euclides, cuja formação se desenrolou na Academia de Platão. A sua obra constitui uma organização ampla e sistemática, apresentada numa forma axiomática-dedutiva, de descobertas diversas de vários pensadores gregos do período clássico (60). Através das suas formulações axiomáticas, consideradas rigorosas, os trabalhos desenvolvidos pela Academia de Platão e, muito especialmente, os de Euclides, possibilitaram a resolução da 'crise' relativa ao aparecimento dos números irracionais e aos paradoxos de Zenão.

Os textos mais difundidos de Euclides são os treze livros que constituem os *Elementos*, segundo Struik, "a seguir à Bíblia, provavelmente, o livro mais reproduzido e estudado na história do mundo ocidental (...) [e cuja] estrutura lógica influenciou o pensamento científico talvez mais do que qualquer outro texto do mundo" (61).

Os *Elementos* de Euclides representam a primeira axiomatização da história da matemática. Até ao secúlo XIX, os *Elementos* foram considerados o modelo da verdade, rigor e certeza, tendo-se transformado, durante vários séculos, no próprio paradigma da ciência. Nomeadamente, Newton não hesitou em considerá-los como modelo para a construção de toda a teoria científica que se quisesse rigorosa e os seus *Principia* inspirar-se-iam neles (62).

2.3 - A certeza da verdade deu lugar à procura da certeza

Com os seus trabalhos matemáticos e pesquisas científicas, os gregos, por um lado, forneceram argumentos substanciais de que o Universo está matematicamente ordenado e de que a matemática é a chave para encontrar essa ordem; por outro lado, evidenciaram que a razão humana era capaz de descobrir, de uma forma 'verdadeira' e 'segura', a estrutura matemática da Natureza.

Nos séculos XVII e XVIII, a geometria euclidiana era ainda objecto de grande admiração, não só porque tinha sido a primeira área da matemática a ser estabelecida dedutivamente, mas também porque, durante mais de dois mil anos, os seus teoremas continuavam a revelar-se verdadeiros quando comparados com a realidade física.

Pascal e Descartes, entre outros pensadores, afirmavam "vigorosamente a 'verdade evidente' da geometria" (63) não exprimindo mais do que "um estado de espírito comum aos matemáticos do seu tempo" (63). Consequentemente, até ao século XIX, a pesquisa matemática confundia-se com a pesquisa da verdade.

Todavia, nem todos os axiomas de Euclides eram igualmente evidentes. O axioma das paralelas, ou o quinto postulado de Euclides, como é, frequentemente designado, tinha sido objecto de numerosas discussões já desde a Antiguidade.

Segundo Kline (64), aparentemente, nem o próprio Euclides gostava muito da sua formulação, uma vez que só se serviu dele depois de ter provado, sem o utilizar, tantos teoremas quantos era possível.

Ao longo dos séculos foram feitas inúmeras tentativas para resolver os problemas relacionados com este axioma. Kline (64) agrupa-as em duas espécies: a primeira consistia em o substituir por um enunciado aparentemente mais evidente; a segunda em tentar deduzi-lo dos outros nove axiomas apresentados por Euclides.

No entanto, todas estas tentativas se revelaram vãs. Pelo contrário, evidenciaram que, adoptando um axioma que fosse essencialmente diferente do axioma das paralelas, não só não se chegava a nenhuma contradição mas, mais do que isso, mostraram que havia lugar para a existência de várias outras geometrias, diferentes da de Euclides, mas com estruturas lógicas igualmente válidas. Estava aberto o caminho para o desenvolvimento da geometria não euclidiana (65).

Relativamente à geometria não euclidiana, o facto mais significativo é que ela "podia ser utilizada para descrever as propriedades do espaço físico de maneira tão precisa como o fazia a geometria euclidiana" (66). Ora, esta ideia estava em completa oposição com as opiniões cultivadas nos meios intelectuais da época, que concediam à geometria euclidiana um estatuto de conhecimento absolutamente verdadeiro.

Assim, a aceitação da geometria não euclidiana pela comunidade matemática não foi fácil, nem linear. Afinal, o que estava em causa era não só a antiga crença grega da verdade matemática como chave para conhecer o Universo, mas o próprio poder da razão para aceder ao conhecimento verdadeiro.

Com o passar dos tempos, foram-se acumulando evidências de que a geometria do espaço físico podia bem ser não euclidiana. Contudo, esta geometria foi aceite pelos matemáticos sem que se tivessem solidificado os argumentos em favor da sua aplicabilidade.

Talvez a verdadeira razão desta aceitação esteja, como refere Kline (67), na frase que Max Planck escrevia por volta de mil e novecentos:

> "Uma verdade científica nova não triunfa porque convence ou porque esclarece os seus opositores, mas antes porque estes opositores acabam por desaparecer e porque uma nova geração nasce e cresce na familiaridade com essa nova ideia".

Os matemáticos desta época, embora tendo perdido a geometria como chave de acesso ao saber verdadeiro sobre a Natureza, não desistiram, contudo, de tentar encontrar a verdade através de outro 'ramo' da matemática. Mas, onde procurar?

A partir de mil oitocentos e vinte, começa a surgir à luz do dia a ideia de que, o que deve ser colocado na base da matemática clássica não são as noções geométricas dos gregos, mas o conceito de número inteiro.

Entre os matemáticos que partilham esta tese está Gauss que, para lá de considerar a matemática como 'rainha das ciências', considerava a aritmética como 'rainha da matemática' (68). Kline (69), referindo-se aos matemáticos que adoptaram o partido de Gauss na procura da verdade matemática, escreve:

> "A verdade reside no número, que está na base da aritmética, da álgebra, do cálculo infinitesimal e dos ramos superiores da análise". Como diz Jacobi "Deus procede sempre como aritmético. Já não se trata do Deus geómetra que Platão defendeu".

Este movimento foi designado por "aritmetização da matemática" (70). No entanto, o aparecimento de números tridimensionais (os quaterniões de Hamilton), que não gozavam da propriedade comutativa da multiplicação como acontecia com os outros números conhecidos até então, e a criação de "novas álgebras com propriedades cada vez mais estranhas" (71), lançou a dúvida sobre a verdade da aritmética e álgebra usuais. E os matemáticos foram levados a descobrir que se podem introduzir na aritmética operações diferentes das que nos são familiares, e criar uma aritmética igualmente aplicável. Assim, a aritmética como o corpo de verdades necessariamente aplicável aos fenómenos do mundo físico, estava também posta em causa.

Segundo Kline, "a triste conclusão que os matemáticos foram obrigados a tirar de tudo isto é que não existe nenhuma verdade em matemática, se se entender por verdade, leis relativas ao mundo real" (72).

Em suma, a tentativa empreendida pelos gregos de tentar garantir a verdade matemática partindo de verdades evidentes e utilizando somente raciocínios dedutivos, tinha-se revelado vã. Este facto foi muito difícil de admitir por numerosos matemáticos, que continuaram a desenvolver grandes esforços no sentido de recuperarem a segurança que pensavam ter perdido.

"E em lugar da verdade surgia a noção de consistência lógica" (73). Ou, por outras palavras, a certeza da verdade dava agora lugar à procura da certeza.

2.4 - Natureza relativa do rigor e da verdade em matemática

Por volta de 1800, os melhores matemáticos e filósofos consideravam ainda os *Elementos* de Euclides "como o ideal da prova rigorosa" (74). No entanto, uma das revelações obtidas com os trabalhos desenvolvidos sobre a geometria euclidiana foi o facto de que esta, que durante mais de dois mil anos tinha sido considerada como o "paradigma do rigor" (75), apresentava sérias dificuldades de um ponto de vista lógico. Constatou-se que Euclides tinha usado numerosos axiomas que nunca tinha explicitado, utilizava figuras como bases para o raciocínio, demonstrava teoremas apenas para casos particulares, etc. Além disso, o aparecimento de álgebras novas tinha levado os matemáticos a reexaminar as bases lógicas da aritmética e álgebra dos números reais e complexos, tendo verificado que este campo se tinha igualmente desenvolvido de uma forma ilógica.

Afinal, o que se constatava era que "a matemática não tinha sido o paradigma da razão que tinha reputação de ser" (76). Em lugar dos seus resultados terem sido demonstrados lógica e rigorosamente, os matemáticos, ao longo dos séculos, tinham recorrido a intuições baseadas em desenhos geométricos, argumentos físicos, raciocínios indutivos, princípios ad-hoc e manipulações formais de expressões simbólicas.

Foi então empreendida a tarefa de encontrar fundamentos sólidos para a matemática. Para isso, foi reconhecida a necessidade de termos não definidos, da utilização de definições formuladas de forma precisa (eliminando delas todos os termos que pudessem ser considerados vagos ou contestáveis), da explicitação, de uma forma exaustiva, do conjunto de axiomas que serviam de ponto de partida para as teorias, e da demonstração explícita de todos os resultados matemáticos por mais intuitivamente evidentes que pudessem parecer.

Em resumo, procurava-se que os diferentes domínios da matemática assentassem em bases axiomáticas consideradas exactas e não contraditórias, substituindo-se as conclusões, baseadas na intuição ou observações empíricas, por provas dedutivas ditas rigorosas.

Só que as exigências de rigor tinham mudado e aumentado de complexidade. Já não coincidiam com o rigor de que falavam os matemáticos gregos, e muitos outros que se lhe seguiram, quando referiam os *Elementos* de Euclides como paradigma do rigor.

Surgia, assim, um novo significado para a expressão *rigor matemático*.

Grabiner (77) refere-se a este período de mudança nos padrões de rigor, que ocorreu entre os séculos XVIII e XIX, como um período revolucionário, utilizando o termo *revolução* na linha de Kuhn.

Contudo, é interessante notar que, mesmo após a constatação da necessidade de explicitação de todos os axiomas utilizados nos desenvolvimentos dedutivos, Cantor, por volta de mil oitocentos e oitenta, continuou a servir-se de intuições que não provava e a utilizar um axioma, o axioma da escolha, sem tomar consciência de que o estava a utilizar (78).

Durante o final do século XIX, os matemáticos empreenderam uma intensa actividade axiomática, entrelaçando cuidadosamente os teoremas de modo a tentar garantir a solidez de toda a estrutura matemática.

A verdade matemática absoluta, oriunda da civilização grega, começava a ser substituída por uma *verdade relativa* dos teoremas relativamente aos postulados, definições e correcção de raciocínio:

"O mais que pode ser dito é que **se** os postulados forem verdadeiros **e** as definições forem aceites e **se** os métodos de raciocínio forem correctos, **então** os teoremas são verdadeiros" (79).

Assim, embora a matemática tivesse perdido o seu enraizamento na realidade, uma outra crise da história da matemática parecia estar resolvida.

Mas estaria verdadeiramente? Poder-se-ia garantir, de uma vez por todas, que a matemática constitui um corpo de conhecimento certo, e de tal modo seguro, que nenhuma contradição pode ser deduzida no seu interior?

A descoberta de paradoxos na teoria de conjuntos, a tomada de consciência de que poderiam existir paradoxos semelhantes, embora ainda não detectados, noutros ramos da matemática clássica, levaram os matemáticos a tomar muito a sério o problema da consistência e a interrogar-se como deveria constituir-se a matemática de modo a eliminar e, mais importante do que isso, assegurar que novas contradições não pudessem aparecer.

No entanto, não puderam pôr-se de acordo sobre as bases a escolher para a reconstrução dos fundamentos da matemática. Tinha-se entrado em plena *crise dos fundamentos*.

3 - A busca de fundamentos

Segundo Davis e Hersch, em qualquer discussão sobre os fundamentos da matemática deverão estar presentes "três dogmas padrão: o platonismo, o formalismo e o construtivismo" (80), cuja origem se situa no século XIX, altura em que se falava de uma crise nos fundamentos da matemática.

A partir das considerações históricas e filosóficas, anteriormente apresentadas, destaca-se que, no fundo, esta crise foi manifestação de uma antiga discrepância entre a ideia tradicional sobre a matemática, a que se pode chamar o mito de Euclides (81), (crença segundo a qual os livros de Euclides contêm verdades acerca do universo que são claras e indubitáveis, uma vez que chegam ao conhecimento certo, objectivo e eterno a partir de factos evidentes por si próprios e procedendo através de demonstrações rigorosas) e a prática real de actividade matemática numa determinada época.

Como anteriormente se viu, até ao século XIX este mito foi considerado inquestionável tanto por matemáticos como por filósofos. Só que, neste século, o aparecimento de geometrias não euclidianas, ao evidenciar que mais do que uma geometria era concebível, e o desenvolvimento da álgebra e da análise, ao ultrapassar a intuição geométrica, levaram à perda da certeza na geometria. Segundo Davis e

Hersh, esta perda "foi filosoficamente intolerável pois implicou a perda de toda a certeza no conhecimento humano" (82).

Assim, os matemáticos do século XIX começaram a procurar esta certeza noutros campos, pesquisando os fundamentos da matemática na aritmética e, posteriormente, na teoria de conjuntos. No entanto, nesta teoria começaram a aparecer contradições, eufemisticamente designadas por paradoxos, o primeiro dos quais evidenciado por Russell. Estes paradoxos ilustraram o facto de que, seguindo as regras da lógica intuitiva, podemos ser levados a resultados contraditórios de um modo nunca visto anteriormente nem em aritmética nem em geometria (83).

Assim, o que estava posto em causa já não era a verdade matemática enquanto interpretação correcta do mundo real, mas a própria consistência matemática, ou seja, a própria certeza no saber matemático.

Foi este o pano de fundo da *crise dos fundamentos*, situação para a qual foram propostas três soluções principais: o *logicismo*, o *construtivismo* e o *formalismo*.

3.1 - Logicismo, construtivismo e formalismo

Logicismo: No âmbito do logicismo, os trabalhos de Frege, Russell e Whitehead, nomeadamente a obra *Principia Mathematica* elaborada por estes dois últimos matemáticos, desempenharam um papel de relevo. O programa do logicismo consistia em encontrar uma reformulação da teoria de conjuntos que pudesse eliminar o paradoxo de Russell e mostar que a matemática clássica podia encontrar os seus fundamentos na lógica.

Indicam Davis e Hersh que os trabalhos respeitantes a este programa foram "um fracasso do ponto de vista da sua intenção inicial. Quando a teoria de conjuntos estava emendada de modo a excluir os paradoxos, ela tornara-se uma estrutura de tal modo complicada que, dificilmente, podia identificar-se com a lógica no sentido filosófico de "regras para o raciocínio correcto" (84).

Mostrar que toda a matemática é apenas uma elaboração das leis da lógica (entendidas como as leis da razão) teria sido uma justificação do platonismo. Snapper (85) refere que é frequente afirmar-se que o logicismo tem por base a escola filosófica do *realismo* sustentada pela doutrina platónica. Para este autor, nomeadamente, Russell, sendo realista, aceitava as entidades matemáticas abstractas existentes na matemática clássica sem se questionar se a mente humana as poderia construir .

Construtivismo: Contrariamente ao logicismo, que admitia a existência autónoma de objectos matemáticos, o construtivismo, nomeadamente o intuicionismo iniciado por Brower em 1908, aceitava apenas aqueles objectos que a mente humana pudesse construir (86).

A finalidade do programa construtivista, tal como acontecia com o logicista, era reconstruir a matemática de modo a preservá-la de contradições. Só que, enquanto os logicistas consideravam os paradoxos, erros originados pelos matemáticos mas não provenientes de imperfeições da ciência matemática, os intuicionistas consideravam-nos indicações claras de que a matemática clássica estava longe de ser perfeita.

Brouwer (87) desenvolve um programa intuicionista baseado em princípios de raciocínio que não estão inteiramente de acordo com os permitidos pelos logicistas. Para este matemático não é a experiência nem a lógica que determinam a coerência e aceitabilidade das ideias, mas sim a intuição.

Na óptica filosófica intuicionista de Brower, a matemática constitui uma actividade humana, totalmente autónoma, auto-suficiente e independente da linguagem ou das relações verbais, que encontra a sua origem no espírito e aí se exerce. Consequentemente, esta ciência não possui nenhuma existência fora da mente humana, sendo independente do mundo real (88).

Refere este matemático que o espírito humano reconhece intuições fundamentais, que não são sensíveis nem empíricas, mas que constituem certezas imediatas respeitantes a alguns conceitos matemáticos. Entre estas encontra-se o reconhecimento de acontecimentos distintos numa sequência temporal:

> "A matemática aparece quando o sujeito abstrai, da dualidade que resulta da passagem do tempo, todas as ocorrências particulares" (89).

Influenciado pela teoria de Kant relativa à intuição do tempo, Brouwer apresenta a tese de que os números naturais nos são dados por uma intuição fundamental que é o ponto de partida de toda a matemática. Concebe o pensamento matemático como um processo de construção mental que, partindo dos números naturais, prossegue através de um número finito de passos e é independente da experiência.

Snapper (90) salienta que os intuicionistas, em virtude dos princípios de raciocínio que admitiam, nomeadamente ao considerarem que os únicos objectos matemáticos genuínos são apenas os que podem ser obtidos por construções finitas, para lá de rejeitarem muitos dos princípios e teoremas da matemática clássica, estabeleceram alguns resultados que, aí, são considerados falsos.

Alem disso, o mesmo autor indica ainda que, frequentemente, as demonstrações apresentadas pelos intuicionistas foram consideradas, pelos matemáticos clássicos, muito mais longas e menos "elegantes" do que outras não elaboradas segundo métodos construtivistas. Assim, refere Snapper, a "comunidade matemática rejeitou quase universalmente o intuicionismo" (91).

Tal como o logicismo está relacionado com o realismo, também o intuicionismo está relacionado com o *conceptualismo*. Esta filosofia sustenta que as entidades abstractas existem apenas na medida em que são construídas pelo espírito humano. Aliás, para Snapper, o contraste entre logicismo e intuicionismo é muito semelhante ao existente entre o realismo e o conceptualismo (92).

Também o intuicionismo não foi bem sucedido na tentativa de encontrar fundamentos consistentes para a matemática. Hilbert "ficou particularmente alarmado" (93) com o programa de Brouwer, escrevendo:

> "Weil e Brouwer (...) procuram salvar a matemática lançando ao mar tudo o que causa problemas (...) se seguissemos uma reforma como a que sugerem, correríamos o risco de perder grande parte do nosso tesouro mais valioso" (94).

Formalismo: Segundo Davis e Hersh, Hilbert empreendeu a tarefa de 'defender' a matemática, propondo-se construir uma "demonstração matemática da consistência da matemática clássica" (95). O grande objectivo do programa formalista era encontrar uma técnica matemática que pudesse provar, de uma vez por todas, que esta ciência estava livre de contradições.

Para tal, Hilbert introduziu na matemática uma linguagem e regras formais em número suficiente para que toda a 'demonstração correcta' de um teorema clássico pudesse ser representada por uma dedução formal, partindo de axiomas e com cada passo mecanicamente verificável. Necessitou também de desenvolver uma teoria das propriedades combinatórias desta linguagem formal e demonstrar que não podiam ser deduzidas contradições dentro deste sistema. Propunha-se fazer tudo isto utilizando raciocínios e argumentos que Brouwer não pudesse rejeitar.

Hilbert, para evitar as ambiguidades de linguagem e as utilizações de saber intuitivo que, segundo ele, estariam na base de alguns dos paradoxos, para eliminar outros paradoxos e para atingir a objectividade e precisão das demonstrações, decidiu que todos os enunciados lógicos e matemáticos deviam ser expressos de forma simbólica, como fórmulas ou conjuntos de símbolos que não pudessem ser interpretados na matemática formal que propunha. Assim, pretendia estabelecer o que designava por demonstrações objectivas, ou seja, um encadeamento de fórmulas deduzidas através de implicações a partir de símbolos, axiomas ou conclusões previamente estabelecidas (96).

Surgia assim a teoria da demonstração ou metamatemática onde, segundo Lakatos, as "teorias matemáticas são substituídas por sistemas formais, as demonstrações por certas sequências de fórmulas bem estabelecidas, as definições por 'artigos abreviativos'" (97). Fazer matemática consistia, pois, para os formalistas, em manipular símbolos sem significado de acordo com regras sintácticas explícitas.

Repare-se que a formalização que Hilbert pretendia para as teorias matemáticas não coincide com a axiomatização dessas teorias. Podem formalizar-se teorias já axiomatizadas. Por exemplo, a geometria euclidiana, que foi axiomatizada cerca de trezentos anos A. C., só começou a ser formalizada cerca de 2200 anos mais tarde com os programas logicistas e formalistas.

Anteriormente, comparou-se o logicismo com o realismo e o intuicionismo com o conceptualismo. Segundo Snapper (98), a filosofia que está mais próxima do formalismo é o *nominalismo*, ou seja, a filosofia que sustenta que as entidades abstractas não têm existência de qualquer espécie, nem fora da mente humana, como mantinha o realismo, nem como construções mentais, como afirmava o conceptualismo. Para o nominalismo as entidades abstractas são apenas nomes, linhas escritas ou meras expressões vocais.

Enquanto posição filosófica, o formalismo tende a identificar a matemática com a sua abstracção axiomática formal, podendo ser encarada como uma perspectiva segundo a qual "quase toda ou toda a matemática pura é um jogo sem sentido" (99), jogado segundo certas regras e a partir de marcas no papel.

Uma razão para o predomínio do formalismo foi a sua ligação com o positivismo lógico, se bem que a filosofia formalista da matemática tenha, segundo Lakatos, raízes muito mais profundas. "Ela é o último elo da longa cadeia de filosofias dogmáticas da matemática. O debate entre dogmáticos e cépticos remonta há mais de dois mil anos (...) e neste debate a matemática foi a fortaleza orgulhosa do dogmatismo" (100).

Em 1930, Gödel enunciou o teorema da incompletude evidenciando que nunca se poderia encontrar em matemática uma certeza completa por meio de qualquer método baseado na lógica tradicional, uma vez que "qualquer sistema formal consistente suficientemente forte para conter a aritmética elementar seria incapaz de demonstrar a sua própria consistência" (101).

Os resultados alcançados por Gödel, se por um lado estimularam o desenvolvimento de sistemas lógicos não aristotélicos onde uma afirmação pode não ser totalmente verdadeira, nem totalmente falsa (o que abre a possibilidade da existência de uma lógica trivalente e de teoremas logicamente incertos), por outro lado mostraram que o projecto de Hilbert era irrealizável.

Pelo que foi dito, evidencia-se que, quer o logicismo, quer o intuicionismo, quer ainda o formalismo, procuravam manter a certeza em matemática e, ainda que oferecendo-a a um certo preço, mesmo assim não o conseguiram.

Apesar das divergências, estas escolas partilhavam o pressuposto de que a matemática deveria assentar em fundamentos seguros e que esta ciência é um domínio de verdades absolutas e de conhecimento certo. Por este facto, Ernest (102) indica que constituem *escolas de pensamento absolutistas*, se bem que nem todas representem a mesma forma de absolutismo.

3.2 - Perspectivas absolutistas sobre o saber matemático

Para Ernest, enquanto o logicismo e o formalismo são *perspectivas absolutistas formais*, o intuicionismo representa o que designa por uma *perspectiva absolutista progressista* (103). Este autor chama, nomeadamente, a atenção para que o intuicionismo, a partir do momento em que olha a intuição matemática como base necessária para a criação de teorias, reconhece a importância da actividade humana na criação de novas teorias e aceita que existe algo mais do que a matemática puramente formal.

Para estabelecer a distinção entre perspectivas absolutistas formais e perspectivas absolutistas progressistas, Ernest refere Confrey e indica que, nas primeiras, a matemática constitui "a súmula da certeza, de verdades imutáveis e de métodos irrefutáveis" (104). Nesta perspectiva, esta ciência "deriva da acumulação de verdades matemáticas (...) tem uma estrutura *a priori* e inflexível" (104), "onde os conceitos não se desenvolvem, são descobertos (...) e as verdades primeiras permanecem imutáveis pela descoberta de uma nova verdade" (104).

Por outro lado, as perspectivas absolutistas progressistas, embora absolutistas, vêem a matemática mais como o resultado da actividade humana para atingir a verdade do que a obtenção desta verdade. De acordo com estas perspectivas, o progresso matemático "é um processo de substituição de teorias prévias por outras superiores que tenham em conta não só todos os dados anteriores como outros dados (...) consiste em descobrir verdades matemáticas que não sejam consistentes com uma teoria ou que não tenham sido tidas em conta por esta teoria, e ampliá-la de modo a que abarque os novos fenómenos matemáticos" (104).

Ernest refere que, nas perspectivas absolutistas, a verdade matemática resulta, em primeiro lugar, de se considerarem verdadeiras as afirmações básicas que constituem o ponto de partida para as demonstrações matemáticas, ou seja, as afirmações que são aceites sem demonstração; em segundo lugar, de se utilizar o método dedutivo, regras lógicas de inferência que possibilitam que nada mais seja deduzido de verdades além de verdades.

Se se analisar um pouco de perto o processo pelo qual o logicismo, o intuicionismo e o formalismo visavam garantir a certeza, constata-se que este processo continha em si elementos que poderiam causar dificuldades ao objectivo pretendido. Estas escolas, sendo escolas de pensamento absolutistas, aceitaram sem demonstração um conjunto de afirmações básicas a partir das quais deduziram logicamente os seus resultados (105).

Ora, por um lado o conjunto de afirmações básicas não pode ser eliminado de uma teoria matemática. Por outro lado, a lógica dedutiva não introduz verdade nos raciocínios e afirmações... Quando muito poderia transmiti-la. A partir do momento em que as três escolas aceitam princípios não demonstrados, esses princípios ficam abertos ao desafio, à dúvida e à incorrecção.

Assim, como Lakatos evidencia, "a questão da certeza em matemática conduz, inevitavelmente, a um círculo vicioso. Todo o sistema matemático depende de um conjunto de afirmações, e tentar estabelecer a sua certeza demonstrando-as conduz a uma regressão infinita" (106).

Se se olhar para a demonstração como garantia para a certeza em matemática, novas dificuldades se levantam.

De facto, as demonstrações publicadas pelos matemáticos como prova da validade dos seus teoremas são "frequentemente defeituosas e não inteiramente fiáveis" (107) e avaliar a sua correcção ou traduzi-las para demonstrações completamente formais e rigorosas é uma tarefa não mecânica mas humana e, portanto, susceptível de errar.

Se nos situarmos numa perspectiva filosófica absolutista, o problema de assegurar a certeza em matemática parece ser insolúvel. Torna-se, assim, pertinente olhar a matemática sem a preocupação dominante de encontrar fundamentos seguros e absolutos para esta ciência.

Nota conclusiva

Tendo em conta a reflexão apresentada ao longo deste capítulo, há alguns pontos que importa salientar.

O primeiro relaciona-se com a axiomatização e formalização de uma teoria enquanto ponto que, embora podendo não ser de chegada, não é, de facto, um ponto de partida.

O segundo diz respeito à actividade de produção matemática. Se se tiver em conta o desenvolvimento histórico desta ciência, há duas vertentes fundamentais que ressaltam: uma que evidencia que fazer matemática é encontrar conceitos e proposições abstractas e aplicar estratégias derivadas dessas proposições; outra, mais funcional, que põe a tónica na invenção ou descoberta de estratégias que funcionem de acordo com o contexto em que são aplicadas.

A primeira vertente é a perspectiva mais convencional. No entanto, como foi evidenciado pelo desenvolvimento da matemática egípcia e babilónica, a segunda vertente, mais instrumental, tem igualmente raízes profundas nas práticas matemáticas, tendo desempenhado um papel de relevo na produção de saber matemático novo.

Estes dois pontos servem para destacar que, analisar a matemática apenas enquanto ciência já feita, deixa de lado muitos dos seus aspectos essenciais. Assim, a compreensão do que está em jogo na actividade de produção do saber matemático passa também pela análise da matemática enquanto ciência a fazer.

O terceiro ponto a realçar prende-se com a constatação do carácter não absoluto da verdade, certeza e rigor matemáticos. A mudança nos padrões de rigor, ocorrida nos séculos XVIII e XIX, não surgiu por imposição ou por acaso. Foram matemáticos da época que sentiram a necessidade e o desejo de organizar, de uma forma consistente, os vários resultados a que tinham chegado, e introduziram, através de processos que não foram isentos de conflitos, novos critérios de rigor no desenvolvimento das suas teorias.

O quarto ponto a salientar relaciona-se com a mudança que experimentou a filosofia da matemática (ou pelo menos considerações filosóficas sobre a matemática), enquanto disciplina, por volta dos séculos XIX e XX, altura em que ocorreu a crise dos fundamentos anteriormente referida.

Repare-se que esta crise não foi a única que surgiu ao longo do desenvolvimento da matemática. Pelo menos duas vezes antes na história apareceu algo de semelhante. Uma delas na antiguidade clássica quando os gregos descobriram números que eram incompatíveis com a compreensão que tinham do conceito de número. Outra, nos séculos XVIII e XIX, quando os matemáticos sentiram necessidade de analisar e redefinir os seus padrões de rigor matemático. Em ambos os casos as contradições que surgiram foram ultrapassadas, através do desenvolvimento de teorias envolventes, tendo a maior parte dos matemáticos continuado a acreditar que a sua ciência era verdadeira ou pelo menos segura. Desta vez, contudo, tal não foi possível.

Para coroar todos os desacordos e incertezas relativamente a saber quais os melhores fundamentos para a matemática, os trabalhos de Gödel ao mostrarem a incapacidade dos matemáticos para provar a consistência da matemática, evidenciaram que, seja qual a filosofia da matemática que se adopte, corre-se sempre o risco de chegar a contradições.

Actualmente, não se está mais perto de fundamentos sólidos da matemática do que se estava há um século atrás. No entanto, as controvérsias sobre estes fundamentos não têm já o impacto de outrora. Conduzem a círculos que parecem cada vez mais distantes das preocupações matemáticas e filosóficas de todos os dias (108).

É nesta conjuntura que hoje se acentua, cada vez mais, a importância de encontrar novas direcções para a filosofia da matemática. Talvez o encarar a incerteza do conhecimento matemático seja, como salienta Ernest, "o próximo estádio de maturidade da raça humana" (109); talvez seja o "próximo acto de descentração que o desenvolvimento humano requer" (109).

É sobre estas novas direcções na filosofia da matemática que incidirá o capítulo seguinte.

Notas

(1) O significado que aqui é atribuído ao termo *objectivo* é o proposto por Bloor: "a belief that is objective is one that does not belong to any individual. It does not fluctuate like a subjective state or a personal preference. It is not mine or yours, but can be shared. It has an external thing-like aspect to it."
Este autor é citado por ERNEST (P.), 1991, The Philosophy of Mathematics Education, Hampshire, The Falmer Press, p.46.
(2) CANÁRIO (R.), 1989, O Determinismo e o Naturalismo como Obstáculo à Inovação Pedagógica, Versão escrita da conferência proferida no colóquio "A História e as Ciências Sociais na formação de professores", realizada na E.S.E.P. de 1 a 4 de Junho de 1989, policopiada, p.14.
(3) SOUSA SANTOS (B.), 1989, Introdução a uma Ciência Pós-Moderna, Porto, Edições Afrontamento, p.41.
(4) DAVIS (P.), HERSH (R.), 1986, A Experiência Matemática, Rio de Janeiro, Livraria Francisco Alves Editora S.A., p.31.
(5) Citado por DAVIS (P.), HERSH (R.), ibid, p.32.
(6) DAVIS (P.), HERSH (R.), ibid, p.33.
(7) Ibid, p.138.
(8) KLINE (M.), 1976, O Fracasso da Matemática Moderna, São Paulo, Ibrasa, p.148.
(9) DAVIS (P.), HERSH (R.), 1986, op. cit., pp.138,183.
(10) Russell citado por KLINE (M.), 1976, op. cit., p.101.
(11) DAVIS (P.), HERSH (R.), 1986, op. cit., pp.138,139, referem que esta é a opinião científica convencional. Segundo estes autores, esta opinião considera a religião em contraste com a matemática, uma vez que aquela é considerada como o reino da crença pura não afectada pela razão e esta é o campo onde sabemos o que sabemos e sabemos com certezas; onde as verdades de hoje são verdades para sempre. Afirmam ainda que esta dicotomia, apesar de actualmente dominante, não é universal, e que ao longo dos séculos a interacção entre a matemática e a religião teve vários aspectos frutíferos.
(12) DIEUDONNÉ (J.), 1990, A Formação da Matemática Contemporânea, Lisboa, Dom Quixote, p.175.
(13) DAVIS (P.), HERSH (R.), 1986, op. cit., p.44.
(14) Referido por DIEUDONNÉ (J.), 1990, op. cit., p.43.
(15) Expressão utilizada por DIEUDONNÉ (J.), 1990, ibid, p.53.
(16) Ibid, p.91.
(17) Ibid, p.118. Segundo Dieudonné, a noção de estrutura acentuou a ideia de que, numa teoria, mais do que a natureza dos objectos matemáticos que aí figuram, o que importa são as relações entre eles; pode acontecer que, em duas teorias diferentes, haja relações que se exprimam da mesma maneira; o sistema destas relações e as suas 'correspondências' é uma mesma estrutura 'subjacente' às duas teorias.
(18) TYMOCZKO (T.), 1986, "Introduction" in New Directions in the Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, p.xiv.
(19) SNAPPER (E.), 1979, "The Three Crises in Mathematics: Logicism, Intuitionism and Formalism" in Mathematics Magazine, Vol. 52, No. 4, Septembre 1979, p.209.
(20) É o que fazem, por exemplo:
- DAVIS (P.), HERSH (R.), 1988, "Da Certeza à Falibilidade" in A Natureza da Matemática, Cadernos de Educação e Matemática, Nº 1, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, p.47;
- HERSH (R.), 1986, "Some Proposals for Reviving The Philosophy of Mathematics" in New Directions in The Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, p.17;
- ORTON (R.), 1988, "Two Theories of "Theory" in Mathematics Education: Using Kuhn and Lakatos to Examine Four Foundational Issues" in For The Learning of Mathematics 8, 2, Montreal, F L M, Publishing Association, p.39.

(21) DAVIS (P.), HERSH (R.), ibid, p.45.
(22) Ver BROWDER (F.), LANE (S.), 1988, "A Relevância da Matemática" in A Natureza da Matemática, Cadernos de Educação e Matemática, nº 1, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, pp.17-44.
Browder e Lane referem que o estudo das propriedades de curvas conhecidas por cónicas, e a sua utilização no estudo das órbitas dos planetas, teve um desfasamento de cerca de 1800 anos. Refere-se neste artigo que Appolonius de Perga, geómetra grego, escreveu no ano 200 A. C. um tratado célebre sobre as

secções cónicas, em que descrevia de forma sistemática as propriedades destas curvas. Apenas em 1604 o matemático e físico alemão Johannes Kepler se utilizou dessa teoria para afirmar que as órbitas dos planetas deveriam ser descritas como elipses (uma das curvas em questão) e não como círculos e epiciclos. Estavam assim lançados os principais alicerces da teoria de Newton.

Kline tem uma perspectiva um pouco diferente sobre esta temática. Ver, por exemplo:

KLINE (M.), 1989, Mathématiques: la Fin de la Certitude, Christian Bourgois Éditeur, pp.532,533.

Aí pode ver-se que Kline acentua que, embora seja exacto que Apollonius tenha demonstrado diversos teoremas relativos às cónicas que não possuiam nenhuma aplicação, o que é um facto é que, muito antes da época de Apollonius, é provável que as secções cónicas tenham aparecido durante o processo de construção de quadrantes solares; por outro lado, Kline salienta que é natural que problemas ópticos e problemas relativos à determinação do comprimento da aresta de um cubo de volume duplo do de um cubo dado, tivessem motivado pesquisas sobre secções cónicas.

(23) KLINE (M.), ibid, pp.516-521. A citação encontra-se na p.520.
(24) DIEUDONNÉ (J.), 1990, op. cit., p.31.
(25) KLINE (M.), 1989, op. cit, p.537.
(26) Courant, citado por KLINE (M.), ibid, p.542.
(27) Ver DAVIS (P.), HERSH (R.), 1988, op. cit., p.49.
(28) SEKIGUCHI (Y.), 1991, An Investigation on Proofs and Refutations in The Mathematics Classroom, A Dissertation Submitted to the Graduate Faculty of the University of Georgia in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree Doctor of Education, Athens, Georgia, policopiado, p.10.
(29) DAVIS (P.), HERSH (R.), 1988, op. cit., p.49.
(30) Ibid, p.51.
(31) Ver SEKIGUCHI (Y.), 1991, op. cit., pp.11,12,17.
(32) Referências à posição filosófica de Hume foram encontradas em:
- KLINE (M.), 1989, op. cit., pp.138-141;
- CHARLESWORTH (M.), 1986, Science, Non-Science & Pseudo-Science, Deakin University Press.

(33) KLINE (M.), ibid, p.140.
(34) As referências sobre a perspectiva filosófica kantiana tiveram fundamentalmente por base:
- DAVIS (P.), HERSH (R.), 1988, op. cit., pp.45-72;
- KLINE (M.), 1989, op. cit., pp.141-145,336,423,424.

(35) DAVIS (P.), HERSH (R.), ibid, p.51.
(36) KLINE (M.), 1989, OP. CIT., p.143.
(37) Ibid, p.144.
(38) Ibid. As citações encontram-se, respectivamente, nas pp.423 e 144.
(39) Ibid, p.142.
(40) Ibid, p.428.
(41) DAVIS (P.), HERSH (R.), 1988, op. cit., p.51.
(42) Ibid, p.52.
(43) ERNEST (P.), 1991, op. cit., p.34.
(44) Esta secção teve por referência bibliográfica, fundamentalmente, as seguintes publicações:
- DAVIS (P.), HERSH (R.), 1986, op. cit.;
- KLINE (M.), 1989, op. cit.;
- STRUIK (D.), 1989, História Concisa das Matemáticas, Lisboa, Gradiva.

(45) KLINE (M.), 1989, ibid, p.38.
(46) Esta temática é desenvolvida por STRUIK (D.), 1989, op. cit., pp.73-77.
(47) KLINE (M.), 1989, op. cit., p.21.
(48) STRUIK (D.), 1989, op. cit., p.78, refere que, enquanto a maior parte dos sofistas dava ênfase à realidade da mudança - especialmente os atomistas - os pitagóricos debruçavam-se, fundamentalmente, sobre o estudo dos elementos imutáveis da Natureza e da Sociedade.
(49) Ibid, p.78.
(50) KLINE (M.), 1989, op. cit., p.26. Ver também pp.25-32.
(51) STRUIK (D.), 1989, op. cit., p.81.
(52) Ibid, p.82.
(53) Citado por KLINE (M.), 1989, op. cit., p.33.
(54) KLINE (M.), ibid, pp.33,34.
Segundo Kline, a segunda citação é uma afirmação feita por Platão na República.

(55) Ver Kline, ibid, p.34. Aí Kline refere que Plutarco, Eudoxo e Arquitas, célebres contemporâneos de Platão, recorriam a raciocínios mecânicos para 'demonstrar' resultados matemáticos, o que indignava profundamente Platão.
(56) Referido por KLINE (M.), 1989, ibid, pp.35,36.
(57) KLINE (M.), 1989, ibid, p.41.
(58) Estes dois filósofos são referidos por KLINE (M.), ibid, p.44.
(59) STRUIK (D.), 1989, op. cit., p.89.
(60) Uma perspectiva sobre o significado actual de "método axiomático dedutivo" em matemática é referida por FREITAS (C.), 1988, "O Método Axiomático em Matemática" in Pensar a Ciência, Lisboa, Gradiva, pp.107-109.
(61) STRUIK (D.), 1989, op. cit., pp.90,91.
Este autor salienta, contudo, que, na verdade, *Elementos* "é o título usado para todos os tratados axiomáticos gregos, incluindo o de Euclides e o supostamente escrito anteriormente por Hipócrates" (p.76). No texto do presente trabalho, sempre que houver referência aos *Elementos*, ela diz respeito aos *Elementos* de Euclides.
(62) Ver ERNEST (P.), 1991, op. cit., p.4.
(63) DIEUDONNÉ (J.), 1990, op. cit., p.53.
(64) KLINE (M.), 1989, op. cit., p.147.
(65) Ibid, p.151, refere que, se por geometria não euclidiana se considerar o desenvolvimento de um sistema de axiomas contendo um enunciado que substitua o axioma das paralelas de Euclides, na verdade não há uma geometria não euclidiana mas diversas geometrias não euclidianas. Nos desenvolvimentos destas geometrias os nomes de Saccheri, Klügel, Lambert e Gauss e, de uma forma especial, os de Bolyai, Lobachevski e Riemann. não podem ser esquecidos. É de referir que foi Gauss, em 1813, que designou a geometria que desenvolveu primeiramente por geometria antieuclidiana, depois por geometria astral e finalmente por geometria não euclidiana (p.153). No entanto, Gauss não publicou nada sobre geometria não euclidiana. O que se conhece relativamente ao trabalho que desenvolveu nesta área provém de diários e cartas que escreveu. Como refere Struik, "Gauss parece não ter estado disposto a aventurar-se publicamente em qualquer assunto controverso". Ver STRUIK, 1989, op. cit., p.232.
(66) KLINE (M), ibid, pp.156,157.
(67) Ibid, p.164.
(68) STRUIK (D.), 1989, op. cit., p.226.
(69) KLINE (M.), 1989, op. cit., p.164.
(70) DIEUDONNÉ (J.), 1990, op. cit., p.225.
(71) KLINE (M.), 1989, op. cit., p.169. Sobre esta questão ver nomeadamente as pp.164-176.
(72) Ibid, p.175.
(73) Ibid, p.563.
(74) Ibid, p.190.
(75) KLINE (M.), 1976, O Fracasso da Matemática Moderna, São Paulo, Ibrasa, p.76.
(76) KLINE (M.), 1989, op. cit., p.313. A explicitação desta ideia encontra-se nas pp.313,315.
(77) GRABINER (J.), 1986, "Is Mathematical Truth Time-Dependent?" in New Directions in The Philosophy of Mathematics An Anthology by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, pp.201-213.
(78) Kline refere que Cantor teve a intuição de que todo o conjunto podia estar bem ordenado, ideia que introduziu em 1883 e que utilizou sem nunca provar. Esta ideia estava subjacente a um axioma: o axioma da escolha que Cantor tinha utilizado sem o querer. Esta temática é desenvolvido por KLINE (M.), 1990, op. cit., pp.383-389.
Na p.388, Kline refere que o axioma da escolha tornou-se, frequentemente, num objecto de discórdia entre os matemáticos, e no "axioma mais discutido depois do axioma das paralelas de Euclides".
(79) Estas ideias são propostas por STABLER, citado por ERNEST (P.), 1991, op. cit., p.14. As palavras em destaque encontram-se conforme o original. Nas pp.20,21 da mesma obra, Ernest refere que o significado de *verdade* em matemática mudou com o tempo e distingue três perspectivas:
(a) - A perspectiva tradicional segundo a qual uma afirmação matemática tem o valor verdade se é uma afirmação geral que descreve, de uma forma correcta, todas as suas manifestações no mundo, e além disso as descreve de uma forma necessariamente verdadeira;

(b) - A perspectiva moderna de verdade de uma afirmação relativa a uma teoria matemática subjacente: a afirmação é verdadeira se é satisfeita por alguns modelos ou interpretações da teoria;

(c) - A perspectiva moderna de verdade lógica ou validade de uma afirmação relativa a uma teoria matemática subjacente: neste caso, a afirmação é satisfeita por todas as interpretações ou modelos da teoria.

As afirmações verdadeiras no sentido de (c) podem ser estabelecidas por dedução a partir do conjunto de axiomas da teoria, e constituem um subconjunto das afirmações verdadeiras no sentido de (b).

Assim, a perspectiva moderna de verdade matemática difere francamente da perspectiva tradicional (a) que foi partilhada por inúmeros matemáticos do passado; destaca-se, ainda, do significado que o termo verdade tem na vida do dia a dia, sentido aliás muito próximo desta última perspectiva.

(80) DAVIS (P.), HERSH (R.), 1988,op. cit., p.45.
Para lá desta publicação de Davis e Hersh, neste trabalho a análise da crise dos fundamentos teve por base, fundamentalmente, a consulta das seguintes obras:
- DIEUDONNÉ (J.), 1990, op. cit., cap. IV;
- KLINE (M.), 1989, op. cit., pp.361-504;
- DAVIS (P.), HERSH (R.), 1986, op. cit.;
- GOODMAN (N.), 1986, "Mathematics as an Objective Cience" in New Directions in the Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, pp.79-94;
- SNAPPER (E.), 1979, op. cit. pp.207-216;
- ERNEST (P.), 1991,op. cit., pp.7-18; pp.27-34.

(81) A expressão "mito de Euclides" é utilizada por DAVIS (P.), HERSH (R.), 1988, ibid, p.48.

(82) Ibid, p.52.

(83) O paradoxo de Russell é referido, por exemplo, no artigo de DAVIS (P.), HERSH (R.), 1988, ibid, p.53.
Kline refere que as contradições encontradas na matemática clássica foram, eufemisticamente, designadas por paradoxos, uma vez que este termo camuflava o facto de essas contradições perverterem a lógica da matemática. Ver KLINE (M.), 1989, op. cit., p.15.

(84) DAVIS (P.), HERSH (R.), 1988, ibid, p.54.

(85) SNAPPER (E.), 1979, op. cit., p.209.

(86) DAVIS (P.), HERSH (R.), 1988, op. cit., p.55.
ERNEST (P.), 1991, op. cit., p.12, refere que o intuicionismo foi a filosofia construtivista mais completamente formulada.

(87) Ver KLINE (M.), 1989, op. cit., p.429.

(88) Ibid, pp.428-446.
DAVIS (P.), HERSH (R.), 1988, op. cit., pp.46,54,65.

(89) BROUWER, citado por KLINE (M.), 1989, op. cit., p.428.

(90) SNAPPER (E.), 1979, op. cit., pp.211,212.

(91) Ibid, p.211.

(92) Ibid, p.212.

(93) Expressão de DAVIS (P.), HERSH (R.), 1988, op. cit., p.55.

(94) Hilbert, citado por DAVIS (P.), HERSH (R.), ibid, p.55.

(95) DAVIS (P.), HERSH (R.), ibid.

(96) KLINE (M.), 1989, op. cit., pp.451-454.

(97) LAKATOS (I.), 1984, Preuves et Réfutations. Essai sur la Logique de la Découverte Mathématique, Paris, Hermann, p.1.

(98) SNAPPER (E.),1979, op. cit., p.215.

(99) DAVIS (P.), HERSH (R.), 1988, op. cit., p.47.

(100) LAKATOS (I.), 1984, op. cit., p.5.

(101) DAVIS (P.), HERSH (R.), 1988, op. cit., p.56.
KLINE (M.), 1989, op. cit., p.565, refere que "Gödel mostrou que todo o sistema formal dotado de significação contém proposições indecidíveis, proposições que são independentes dos axiomas. Pode então aceitar-se quer uma tal proposição, quer a sua negação, como axioma suplementar. No entanto, uma vez esta escolha feita, o sistema alargado deve, de acordo com o resultado de Gödel, conter também proposições indecidíveis e assim, é ainda possível efectuar uma nova escolha. Com efeito, este processo desenrola-se sem fim."

(102) ERNEST (P.), 1991, op. cit., pp.7-22; O autor refere que, na perspectiva absolutista, o conhecimento matemático é o único domínio de conhecimento certo se se excluir a lógica e afirmações verdadeiras em virtude do significado dos termos usados, como é o caso, por exemplo, da afirmação 'todos os solteiros não são casados'.
(103) Ibid, pp.27-29. A tradução *absolutismo progressista* corresponde no texto original a *progressive absolutism*.
(104) Ibid, p.28.
(105) As afirmações básicas que as escolas logicista, intuicionista e formalista aceitaram sem demonstração foram, respectivamente, os axiomas da lógica, a intuição fundamental dos números inteiros e os princípios de metamatemática. Ver ERNEST (P.), 1991, op. cit., p.13 e KLINE (M.), 1989, op. cit., pp.564,565.
(106) Referido por ERNEST (P.), 1991, ibid, p.14.
(107) ERNEST (P.), 1991, ibid, pp.16,17, referindo Davis.
(108) TYMOCZKO (T.), 1986, op. cit., p.xv.
(109) ERNEST (P.), 1991, op. cit., p.xi.

Capítulo II - Que novas direcções na filosofia da matemática?

Nota introdutória

Ajudar-nos-á, realmente, imaginar que há alguma *verdade* absolutamente objectiva e certa em matemática?

De algum modo, o primeiro capítulo, que resultou de reflexões diversas que tiveram como ponto de partida esta questão, procurou responder-lhe negativamente. Em traços largos, nesse capítulo, procurou-se evidenciar que a utilização do método axiomático-dedutivo, frequentemente considerada equivalente à matemática, representa, no fundo, apenas uma parte da experiência matemática, havendo além dele, na actividade dos matemáticos, outros aspectos igualmente fundamentais. Entre estes encontra-se a matemática enquanto actividade criativa de pensamento, preocupada (implícita ou explicitamente) com a resolução de problemas relevantes, quer para a prática do dia a dia, quer para outras ciências, quer ainda para teorizações matemáticas mais ou menos abstractas. Mostrou-se ainda, nesse capítulo, que a esperança de encontrar certezas completas em matemática foi profundamente abalada pelos resultados de Gödel.

A perda da certeza em matemática, em lugar de representar uma perda de conhecimento, possibilitou um avanço que abriu as portas para que a matemática pudesse ser vista por um prisma diferente daquele cuja preocupação dominante é a pesquisa de fundamentos seguros. É sobre esta problemática que incidirá este segundo capítulo. Aqui, procurar-se-á uma filosofia da matemática que tenha em conta a prática matemática real.

Com o objectivo de proporcionar um contexto filosófico mais amplo que enquadre os novos desafios que, actualmente, se colocam à filosofia da matemática, começar-se-á por apresentar, numa primeira secção, um conjunto de reflexões sobre a filosofia da ciência, em geral, desenvolvidas por Popper e Kuhn.

Em seguida, referir-se-á a perspectiva filosófica sobre a matemática proposta por Lakatos e, posteriormente, analisar-se-á o quasi-empiricismo enquanto abordagem filosófica para a matemática.

Finalmente, numa terceira secção, e uma vez admitida a ideia de que a filosofia da matemática deve ter em conta a prática matemática real, procurar-se-á reflectir sobre alguns aspectos da experiência matemática, entre os quais se encontram factores extra-lógicos frequentemente negligenciados por abordagens filosóficas fundacionistas.

1 - Contexto filosófico relativo à ciência em geral

Durante muito tempo a história das ciências e a epistemologia constituíram disciplinas de perfil claro e distinto. A história das ciências descrevia "o desfile linear e racional das teorias nas diversas disciplinas, a sua confirmação e a sua crítica pelos factos e os reajustamentos e novas hipóteses que delas decorriam" (1).

Por outro lado, a epistemologia, no prolongamento da teoria do conhecimento, assumia-se como a teoria da ciência. A epistemologia clássica, sendo tida "como uma reduplicação da própria actividade científica, recusava todas as questões sobre a história ou a sociologia da investigação, sobre as relações entre a ciência e filosofia, ou ciência e religião, sobre as imagens do mundo subjacentes às diversas teorias, ou, ainda, sobre a posição subjectiva do homem de ciência em face do ideal de um conhecimento objectivo e intemporal" (2).

Ora, o século XX assistiu a um desenvolvimento das ciências a um ritmo nunca dantes visto. E foi exactamente a importância deste desenvolvimento que suscitou novas questões epistemológicas.

Assim, um conjunto de historiadores e filósofos começaria por se interrogar sobre alguns dos pressupostos da posição clássica, atenta apenas à reconstrução do puro conteúdo das diferentes disciplinas, acabando por pôr em causa a exterioridade tradicional entre a história e a filosofia das ciências (3).

Começa, deste modo, a esboçar-se a epistemologia contemporânea que, pouco a pouco, integra e responde a questões classicamente históricas. Simultaneamente, a história das ciências aparece enriquecida com a necessidade de conhecer as condições relativas à produção e transmissão de conhecimento - vertente claramente epistemológica.

É neste contexto que se inserem os trabalhos desenvolvidos por Popper e Kuhn, filósofos que recorreram à história das ciências como fonte de dados e de inspiração para a compreensão da problemática da produção científica. Só que a história, nalguns aspectos, foi olhada e interpretada, por vezes, de modos diferentes.

Assim, os trabalhos destes autores, embora tenham em comum um conjunto de teses relativas à ciência que os diferenciam, claramente, dos desenvolvimentos epistemológicos clássicos, apresentam características específicas que foram, por vezes, ponto de partida para 'acesos' debates.

De modo a poder evidenciar tanto estas singularidades, como as teses comuns, ponto de partida importante para a compreensão de novas direcções em que, actualmente, se desloca a filosofia da matemática, apresentar-se-ão, em seguida, alguns aspectos das contribuições específicas de Popper e de Kuhn (4).

1.1 - Contribuição de Popper

Popper, pondo profundamente em causa a tradição empirista-positivista e o princípio da indução como meio de construção de teorias científicas, refere que o conhecimento científico é hipotético, falível, é um saber por conjectura que não deriva ou é justificado pela experiência, se bem que a observação, ela própria impregnada de teoria, tenha um papel insubstituível.

Segundo este filósofo, a ciência vem com novos problemas, e uma boa teoria, uma teoria que represente um avanço no desenvolvimento da ciência, deve proceder de uma conjectura audaciosa que seja independentemente testável (que relacione fenómenos nunca antes relacionados e que produza consequências sobre fenómenos ainda não observados) e que resista a experiências e observações conduzidas com vista à sua falsificação.

Uma lei ou teoria científica é tanto mais poderosa quanto mais se expõe a tentativas de refutação. Assim, o método científico consiste, não na procura de exemplos que confirmem generalizações científicas já aceites, mas na correcção de erros, na procura activa de exemplos que tentem falsificar e refutar conjecturas ou hipóteses estabelecidas. Neste processo, os *falsificadores potenciais* (5) da teoria desempenham um papel fundamental, pois é exactamente a possibilidade de falsificação e refutação que permite distinguir conjecturas científicas de outras conjecturas.

Este filósofo salienta que a ciência progride pelo jogo entre factos, conjecturas e refutações, não podendo as teorias científicas aspirar senão a uma validade provisória (nunca a uma prova definitiva), uma vez que escondem em si o "germen da sua refutabilidade" (6). Relativamente ao processo de produção do conhecimento, Popper indica que se a observação não constitui a autoridade, também a razão o não é. "Outras fontes como a intuição intelectual e a imaginação intelectual revestem-se da maior importância ainda que igualmente incertas" (7). Assim, a observação, o raciocínio lógico, a imaginação e intuição interagem na produção e análise crítica das teorias, isto é, no progresso do conhecimento científico.

É de salientar a importância concedida por Popper à formulação linguística dos processos de pensamento. De facto, é esta formulação que, permitindo a comunicação entre os cientistas, possibilita a discussão crítica de teorias e hipóteses, condição fundamental na formulação e refutação de conjecturas.

Um aspecto interessante dos trabalhos desenvolvidos por Popper e onde este filósofo ilustra, claramente, a importância de explicitação dos processos de pensamento humano através da linguagem, é o relativo à realidade e existência de três Mundos que designa por Mundo 1, Mundo 2 e Mundo 3 (8).

O Mundo 1 é o mundo físico, dos objectos. O Mundo 2, mundo psicológico, é o mundo dos processos de pensamento, das experiências subjectivas conscientes ou inconscientes. O Mundo 3, mundo da informação, é o mundo da linguagem, da cultura, das teorias, dos argumentos e dos problemas. Estes três mundos, embora distintos, estão abertos uns para os outros, influenciando-se mutuamente. A existência do Mundo 3 é inseparável da consciência individual dos membros da sociedade, contendo, no entanto, fenómenos de nível diferente desta consciência individual.

Quando os processos de pensamento humano, pertencentes ao Mundo 2, são linguisticamente formulados, tornam-se objectos exteriores a quem os formula. Nesse sentido, podem ser criticados intersubjectivamente, quer pelo próprio sujeito que os formulou, quer por outros sujeitos. Emerge assim, com a linguagem humana, "a crítica intersubjectiva ou objectiva neste sentido (...) e com ela o Mundo 3, humano, o mundo dos padrões objectivos e dos conteúdos dos nossos processos de pensamento subjectivos" (9).

Popper, ao criticar o dogma da indução, ou seja, ao criticar a formulação de leis gerais a partir de experiências e observações particulares, provocou uma mudança fundamental na forma de pensar sobre o conhecimento científico. Introduziu a conjectura onde antes só havia certeza e a refutação onde só havia aceitação. A incerteza e o erro passaram a ser inerentes ao progresso criativo da ciência, progresso assente na resolução de problemas e onde a intuição e a imaginação não têm um papel menor que o do raciocínio lógico.

Kuhn foi, nalguns aspectos, um dos críticos dos trabalhos desenvolvidos por Popper. Nomeadamente, acentuou o carácter pouco claro do conceito de falsificação, mostrando-se descontente com as implicações deste conceito, e discordou das explicações dadas por Popper sobre o processo de desenvolvimento da ciência.

1.2 - Contribuição de Kuhn

O que é a ciência para Kuhn? Como concebe este filósofo o processo de desenvolvimento da ciência?

De uma forma breve, poder-se-á dizer que a resposta a estas questões arrasta consigo duas das contribuições fundamentais de Kuhn: o conceito de paradigma e a teoria da incomensurabilidade (10).

Para Kuhn, na história da ciência há dois "ritmos de alternância" (11): um período de ciência normal e um período de ciência extraordinária.

Como se articulam estes ritmos?

A ciência normal é constituída pela "investigação solidamente baseada numa ou em várias realizações científicas passadas, realizações estas que a comunidade científica considera, numa determinada época, suficientes como ponto de partida para futuros trabalhos" (12). Esta suficiência é fornecida por um conjunto de vários elementos, um manancial de exemplos da própria actividade científica, entre os quais figuram as leis, as teorias, as suas aplicações e os dispositivos experimentais que foram utilizados.

É este conjunto de realizações científicas concretas, construídas pelo homem, partilhadas pelos membros de uma comunidade científica e capazes de fornecer "modelos que originam tradições coerentes de investigação científica" (13), que constitui o que Kuhn designou por paradigma.

Um paradigma constitui, pois, um 'mapa' que guia os cientistas nas suas observações. Indica o que é ou não é ciência numa dada época, estabelece que determinadas áreas de pesquisa científica são interessantes e importantes, aponta que questões devem ser consideradas problemas ou não, dita o estilo de pesquisa científica e enuncia o que deve ser reconhecido como um facto científico.

A ciência normal é a que se efectua no âmbito de um paradigma partilhado pela comunidade científica e consiste, essencialmente, numa actividade de resolução de problemas que Kuhn designa por resolução de enigmas (14).

Um fenómeno que não se integre no paradigma aceite não o põe em causa. É, antes, encarado como um enigma que deve ser desvendado e se um cientista não conseguiu resolvê-lo é a sua competência profissional que é questionada e não a adequação da abordagem dominante.

Pode acontecer que haja enigmas não resolvidos durante largo tempo, "anomalias" (15) persistentes que geram um certo mal estar dentro da comunidade científica. Se após a exploração do domínio da anomalia não for possível reajustar a teoria do paradigma "de modo a que o fenómeno anómalo se torne esperado" (16), instaura-se, progressivamente, uma situação de crise.

A anomalia é cada vez mais reconhecida por um número crescente de cientistas, proliferam tentativas para encontrar a sua solução, procura-se ao acaso, recorre-se a outros saberes, nomeadamente à filosofia, questionam-se os fundamentos do paradigma vigente... Enfim, o período de ciência normal dá lugar a um período de ciência extraordinária que, ou conduzirá a ciência à sua normalidade anterior, ou dará origem à emergência de uma nova teoria com pretensões paradigmáticas. Nesta situação, e caso um novo paradigma se imponha, este surge como algo radicalmente novo que não decorre de um processo linear cuja origem se encontra no paradigma anterior.

É todo este processo que Kuhn designa por revolução científica. Este filósofo refere que é a "transição sucessiva de um paradigma para outro, via revolução, que constitui o padrão de desenvolvimento característico de uma ciência madura" (17).

As teorias, noções e conceitos do novo paradigma são utilizados de modos diferentes dos do paradigma anterior, surgindo conflitos quer quanto aos problemas a resolver, quer quanto às soluções que devem considerar-se aceitáveis. Kuhn traduz este facto dizendo que os paradigmas são incomensuráveis.

Havendo incomensurabilidade entre paradigmas não há possibilidade, segundo Kuhn, de uma comunicação integral entre os cientistas que permita assegurar uma comparação e escolha inteiramente objectivas e lógicas de teorias rivais. De facto, para Carrilho "os paradigmas não permitem transições graduais de aceitação: ou se aceitam ou não, sem meio termo possível que eventualmente a lógica aconselhasse ou a experiência caucionasse" (18).

A tese da incomensurabilidade foi, talvez, a vertente mais criticada da teoria de Kuhn. Nomeadamente, Popper e seus discípulos contestaram-na fortemente acusando-a de introduzir a irracionalidade no desenvolvimento científico.

Para Kuhn, a ciência surge como uma actividade específica com os limites que lhe traça a comunidade dos membros que a praticam (19); ou seja, aquilo que constitui a ciência numa dada época é uma construção inventada pelo homem e não imposta pela Natureza, que resulta de negociações tácitas entre os membros da comunidade científica.

Como o próprio Kuhn refere,

"embora a ciência seja praticada por indivíduos, o conhecimento científico é intrinsecamente um produto de **grupo** e (...) nem a sua peculiar eficácia nem a maneira como se desenvolve se compreenderão sem referência à natureza especial dos grupos que a produzem" (20).

Apesar das divergências e acesos debates entre 'popperianos' e 'kuhnianos', Fernando Gil e o próprio Kuhn (21) acentuam que há nas teses relativas à visão da ciência, propostas por Popper e Kuhn, muitos aspectos compatíveis e mesmo idênticos. Tendo por contexto o que anteriormente foi referido explicitam-se, em seguida, alguns destes aspectos.

1.3 - Pontos de contacto entre Popper e Kuhn

Primeiramente, tanto Popper como Kuhn se encontram unidos na oposição a um certo número de teses características do positivismo clássico. Por exemplo, "não acreditam que haja regras para induzir teorias correctas a partir dos factos, ou mesmo que as teorias correctas ou incorrectas sejam produtos da indução" (22). Vêem o cientista como um sujeito activo e criativo que imagina, inventa teorias, em função de objectivos reais. São ainda cépticos relativamente à existência de uma linguagem neutra para descrever as observações e acentuam o entrelaçamento íntimo destas com estruturas teóricas.

Em segundo lugar, ambos se interessam pelo processo dinâmico pelo qual se produz o conhecimento científico, em vez de se interessarem pela estrutura lógica dos produtos acabados da investigação científica. Consequentemente, insistem em que uma análise do desenvolvimento do conhecimento deve ter em conta o modo como a ciência tem sido realmente praticada. Salientam a importância da observação da actividade científica real, recorrendo, frequentemente, à história para estudar esta actividade.

Neste âmbito, parece difícil Kuhn poder recusar a existência de um mundo distinto do mundo material e do mundo dos processos individuais e sujectivos de pensamento, ou seja, não poderá recusar, com certeza, a existência de um mundo de informação científica, de normas e valores a partir do qual se podem avaliar teorias. Por outras palavras, dificilmente poderá recusar o Mundo 3 de Popper, se bem que a natureza deste mundo possa ser diversa para os dois filósofos.

Além disso, como o próprio Kuhn escreve, "ambos rejeitamos a visão de que a ciência progride por acréscimo; ambos acentuamos de preferência o processo revolucionário pelo qual uma teoria mais antiga é rejeitada e substituída por outra nova e incompatível; e ambos salientamos com profundidade o papel desempenhado neste processo pelo fracasso ocasional da teoria mais antiga em responder a desafios postos pela lógica, experimentação e observação" (23).

Em terceiro lugar, ambos destacam a resolução de problemas e a comunicação entre os cientistas como elementos indispensáveis e insubstituíveis na produção de conhecimento científico.

No que se prende com a resolução de problemas, Popper, em particular, ilustra bem esta relevância quando escreve que "os problemas surgem com a vida, pertencem à relação entre o ser vivo e o mundo (...) e as teorias que colocamos no mundo não são mais do que tentativas de resolução de problemas" (24).

Quanto à comunicação entre os cientistas, recorde-se a importância concedida por Popper à formulação linguística dos processos de pensamento subjectivos e à discussão crítica de teorias. Também Kuhn, por seu lado, vê a ciência como uma actividade pública em que a comunicação é fundamental, pois, como ele próprio acentua, as comunidades científicas "são caracterizadas pela relativa abundância de comunicação no interior do grupo e pela relativa unanimidade do juízo grupal em matérias profissionais" (25).

Entre os filósofos da ciência que se encontram de acordo com os aspectos comuns às teses de Popper e Kuhn que acabaram de ser enunciadas, encontra-se Lakatos, que embora na continuidade de Popper e extremamente crítico a muitas das ideias de Kuhn, não deixou de ser profundamente influenciado por este último filósofo (26).

No essencial, por um lado, Lakatos considera a dinâmica da ciência em termos de sequências de teorias com relações entre elas, de preferência a teorias isoladas. Estas sequências são designadas por programas de investigação e, num certo sentido, este conceito toma o lugar do paradigma de Kuhn. Por outro lado, "Lakatos rejeita o conceito de ciência normal, que considera próprio de uma posição dogmática e acrítica, estranha à posição de um homem de ciência" (27) e propõe-se introduzir na ciência uma "racionalidade do tipo popperiano" (27) em que uma teoria é refutada por outra teoria e não por uma experiência.

Examine-se, em particular, a contribuição de Lakatos no âmbito da filosofia da matemática.

2 - Matemática - Uma ciência a par das outras

2.1 - O falibilismo de Lakatos

Enquanto Popper, Kuhn e outros pensadores actuais transformavam e questionavam a filosofia da ciência, este questionamento não se tinha ainda alargado à matemática, de uma forma fundamentada, até Lakatos o fazer. Em 1976, e já após a sua morte, é publicada em livro, pela primeira vez, a sua obra fundamental *Proofs and Refutations*, segundo Davis e Hersh uma obra prima que, durante os anteriores quinze anos, tinha sido "uma espécie de clássico clandestino entre os matemáticos, apenas conhecido por alguns intrépidos investigadores" (28).

Proofs and Refutations (29) coloca a matemática ao lado das outras ciências, fazendo abalar fortemente o lugar de excepção que lhe era concedido desde os gregos; constitui um ensaio sobre a lógica da descoberta em matemática, onde o erro é reconhecido como tendo um valor insubstituível no processo de produção do conhecimento.

Lakatos considera inaceitáveis as *filosofias absolutistas* da matemática, particularmente o formalismo, e aplica a sua análise epistemológica às matemáticas informais, "à matemática encarada como um processo de crescimento e descoberta" (30). Tendo por referência as tentativas que, historicamente, estiveram subjacentes à demonstração da regra de Euler, mostra, através de um diálogo entre professor e alunos de uma classe imaginária, uma matemática que se desenvolve "não pelo crescimento contínuo de um número de teoremas indubitavelmente estabelecidos, mas pelo melhoramento incessante de conjecturas graças à especulação e à crítica, graças à lógica das provas e refutações" (31).

Contrariamente à ideia, ainda hoje largamente difundida, de que a matemática se enriquece sem erros e falsos passos, Lakatos mostra que esta ciência, também ela, é falível e questionável; também ela se desenvolve através da crítica e da correcção de teorias que nunca estão inteiramente livres de ambiguidades, de possibilidades de erros e de equívocos.

Este filósofo evidencia que a matemática cresce a partir de um problema e através do debate e discussão crítica, onde a dúvida dá lugar à certeza e esta a novas dúvidas. Revela que o processo heurístico de produção do conhecimento matemático é distinto do processo dedutivo e que, na produção deste conhecimento, há uma adaptação constante de axiomas e definições, em simultâneo com uma incessante busca de conjecturas, demonstrações e refutações que assumem, frequentemente, a forma de contra-exemplos.

Assim, na perspectiva de Lakatos, à medida que os argumentos lógicos são examinados pela comunidade matemática, não são apenas as conclusões que são susceptíveis de revisão; são-no também os próprios axiomas e definições que constituem o ponto de partida para esses argumentos.

Neste contexto, a demonstração é encarada de forma diferente à conceptualizada pelos formalistas. Com efeito, não representa um processo formalizado conducente à certeza através de uma cadeia ininterrupta de raciocínios mecanicamente verificáveis que levam das hipóteses às conclusões; é um conjunto de explicações, justificações, elaborações, que "não estabelecem a verdade da conjectura" (32) mas, antes a tornam mais plausível, convincente, detalhada e exacta pela pressão exercida pelos contra-exemplos.

Lakatos, ao criticar que o conhecimento matemático seja *a priori* e infalível, critica a hipótese básica subjacente às escolas fundacionistas. Esta hipótese assentava na ideia de que a matemática era radicalmente diferente das outras ciências, e é exactamente esta conclusão que este filósofo contesta.

A perspectiva filosófica de Lakatos é, frequentemente, designada por falibilismo. No centro desta perspectiva está uma teoria da génese do conhecimento matemático, cujo foco não é psicológico (uma vez que Lakatos não se pronuncia sobre a origem dos axiomas, definições e conjecturas na mente dos indivíduos) mas, antes, o processo pelo qual criações matemáticas privadas se transformam em saber matemático publicamente aceite. Este processo envolve discussão crítica, conjecturas e refutações e, neste sentido, a filosofia proposta por Lakatos para a matemática assemelha-se à filosofia da ciência proposta por Popper.

O falibilismo contrasta, em muitos aspectos, com as escolas filosóficas absolutistas referidas no capítulo anterior. Estas escolas, preocupadas apenas com a sua lógica interna, vêem a matemática como uma ciência discreta, livre de valores e estritamente separada e distinta de outros domínios do conhecimento humano. A atenção das perspectivas filosóficas absolutistas dirige-se para os fundamentos e justificação dos produtos matemáticos acabados (que consideram seguros e objectivos) negando a legitimidade de considerar a génese do conhecimento, tarefa que deixam à psicologia, história ou sociologia. Contrariamente, o falibilismo reconhece que a matemática constitui um corpo de conhecimento falível, permanentemente em expansão e em cujo desenvolvimento o erro tem um papel insubstituível. Além disso, preocupa-se com os contextos humanos da criação matemática e com a génese histórica desta ciência.

O falibilismo, cujo foco é o processo de criação e revisão de conjecturas matemáticas que se desenrola num contexto social de debate e discussão crítica, iniciado por Lakatos em *Proofs and Refutations*, foi posteriormente aprofundado por este filósofo.

2.2 - Matemática - Ciência quasi-empírica

Na publicação *A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics?* (33), Lakatos, a partir de citações de trabalhos de cerca de uma dúzia de investigadores entre os quais se encontram muitos dos principais lógicos do século XX, começa por evidenciar a perspectiva compartilhada por estes da impossibilidade de encontrar uma certeza completa em matemática. Mostra ainda o seu acordo, em muitos dos casos, relativamente ao questionamento do carácter *a priori* e infalível do conhecimento matemático. Prossegue apontando o contraste entre o que designa por teorias quasi-empíricas e teorias euclidianas.

Enquanto as tradicionais filosofias, relacionadas com a pesquisa de fundamentos em matemática, tinham por objectivo reorganizar esta ciência numa base euclidiana, ou seja "estabelecer de uma vez por todas a certeza dos métodos matemáticos" (34), Lakatos inclui a matemática nas teorias quasi-empíricas, considerando o conhecimento matemático intrinsecamente conjuntural e falível.

Para Lakatos, decide-se se uma teoria é euclidiana ou quasi-empírica analisando a forma como nela flui o valor *verdade*. Um sistema é considerado euclidiano se o fluxo característico é a transmissão da *verdade* de 'cima para baixo', ou seja, do conjunto de axiomas aceites como *verdadeiros* para o resto do sistema; é quasi-empírico se o fluxo característico é a retransmissão da *falsidade* 'de baixo para cima', ou seja, das falsas afirmações básicas para as 'hipóteses' (35).

O sentido deste fluxo é independente das convenções particulares que atribuem o valor *verdade* original aos enunciados básicos. Assim, segundo a perspectiva de Lakatos, "uma teoria que seja quasi-empírica (...) tanto pode ser empírica como não empírica no sentido usual" (35).

A metodologia de uma ciência depende, fortemente, do seu ideal ser euclidiano ou quasi-empírico. O desenvolvimento de uma teoria quasi-empírica começa com problemas que são seguidos de conjecturas audazes, testes severos, refutações, especulações arriscadas, criticismo e controvérsia entre teorias rivais. A sua regra básica é procurar hipóteses audaciosas e imaginativas que serão submetidas a um criticismo severo - "a metodologia quasi-empírica é desinibidamente especulativa" (35). Contrariamente, a regra básica de uma ciência que pretenda ser euclidiana, é encontrar axiomas auto-evidentes - "a metodologia euclidiana é puritana e antiespeculativa" (35).

Lakatos (36) considera que, tal como as outras ciências, também a matemática é quasi-empírica, residindo a diferença crucial na natureza dos seus enunciados básicos ou falsificadores potenciais.

Os falsificadores potenciais em matemática, "ao contrário do que acontece em ciências naturais, não são simples enunciados espácio-temporais (isto é, afirmações como "o voltímetro regista 3.2")" (37). Em lugar destes enunciados, são as teorias matemáticas informais que constituem os falsificadores potenciais para as teorias formalizadas. Lakatos deixa, contudo, sem resposta a questão fundamental de quais os objectos das teorias matemáticas informais (38).

Este novo olhar sobre a matemática não mereceu a aprovação de todos os filósofos e matemáticos. Entre outros, Feferman (39) revela sérias reservas ao trabalho de Lakatos, argumentando que o esquema proposto de demonstrações e refutações não é aplicável ao desenvolvimento de todos os ramos da ciência matemática. Igualmente Dieudonné (40) contesta Lakatos dizendo que o erro apenas ocupa um lugar importante nos ramos da matemática ainda em formação.

Levanta-se, no entanto, a questão de se não estarão todos os ramos da matemática constantemente em formação. Não poderão velhas teorias ser sempre olhadas com novos olhos? Porque deverá o matemático ser considerado uma pessoa privilegiada relativamente aos outros pensadores e, por isso, mais imune do que eles aos erros?

2.3 - Quasi-empiricismo enquanto abordagem para a filosofia da matemática

Seguindo Lakatos e Putnam, Tymoczko refere "uma coerente e cada vez mais popular abordagem para a filosofia da matemática" (41) que designa por quasi-empiricismo.

Adoptando a perspectiva filosófica falibilista, esta abordagem olha a matemática sem a preocupação dominante da pesquisa de fundamentos para esta ciência. Em lugar disso, procura recaracterizar a experiência matemática a partir da análise da prática dos matemáticos.

De facto, diversos autores, entre os quais se contam Davis, Hersh, Ernest, Kline, Tymoczko, Putnam e muitos outros, acentuam hoje, cada vez mais, a importância de encontrar uma filosofia que enquadre a prática matemática real em lugar de uma filosofia que prescreva o que deve ser essa prática (42).

Nomeadamente Hersh (43), referindo em particular o platonismo e o formalismo, salienta que estas perspectivas, cada uma à sua maneira, falsificam parte da experiência diária dos matemáticos. Sugere que se pode abandonar a escolha da alternativa entre ambas as posições se se desistir da ideia de encontrar a certeza absoluta na verdade matemática.

Reflectindo sobre possíveis novas direcções na filosofia da matemática, este autor salienta que se deve observar o que fazem os matemáticos e começar a olhar para o conhecimento matemático como realmente ele é: falível, corrigível, desenvolvido por tentativas e em expansão como todo o outro conhecimento humano.

Em vez de se procurar a verdade ou certezas indubitáveis na matemática, em vez de se procurar em vão os seus fundamentos ou de se ficar desorientado pela sua falta, deve-se, pois, segundo Hersh, procurar uma filosofia que enquadre a realidade da actividade matemática.

Assim, na procura de resposta para a questão de em que novas direcções se deve deslocar a filosofia da matemática, adquire uma importância fundamental a observação e análise das práticas actuais e passadas dos matemáticos. Aliás, como atrás se viu, é também esta a direcção em que, actualmente, se desloca a filosofia da ciência.

Se se observarem as práticas matemáticas, ver-se-á que há aí muitos "factores relevantes que foram esquecidos pelos fundacionistas: provas informais, desenvolvimentos históricos, possibilidade de erro matemático, explicações matemáticas (em contraste com provas), comunicação entre os matemáticos, a utilização de computadores e muitos outros" (44). Ver-se-á que a matemática cresce por meio de uma série de grandes avanços intuitivos, que são posteriormente estabelecidos, não numa etapa, mas através de uma série de correcções, de esquecimentos, de erros, até que a demonstração corresponda às normas de aceitabilidade de uma dada época. Ver-se-á que nenhuma prova é definitiva e que novos contra-exemplos deitam por terra provas antigas (45).

A observação da prática matemática real levanta, contudo, algumas questões. De facto, se por um lado as noções e conceitos matemáticos são construções pessoais e sociais, resultantes muitas vezes de conflitos de interesses e valores (46), por outro "a matemática é uma realidade objectiva no sentido de que os objectos matemáticos têm propriedades bem definidas que podemos ou não ser capazes de descobrir" (47).

Há, assim, um aparente paradoxo entre uma experiência matemática profundamente pessoal e social e o carácter autónomo e, em certa medida, externo, dos produtos matemáticos.

Os trabalhos de Popper sobre os Mundos 1, 2 e 3, e as elaborações teóricas desenvolvidas por Hersh num artigo intitulado *Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics* (48) podem fornecer alguns elementos para a compreensão deste paradoxo.

Hersh, apoiando-se na experiência diária dos que estudam matemática, indica que a matemática trabalha com ideias e sugere que as principais propriedades do conhecimento ou actividade matemática são as seguintes:

> "(a) Os objectos matemáticos são inventados ou criados pelos seres humanos.
> (b) São criados, não arbitrariamente, mas emanam da actividade desenvolvida a partir, quer de outros objectos matemáticos já existentes, quer das necessidades da ciência e da vida diária.
> (c) Uma vez criados, os objectos têm propriedades bem determinadas, que poderemos ter grande dificuldade em descobrir, mas que possuem independentemente do nosso conhecimento acerca delas" (49).

Este autor conclui o artigo dizendo que a matemática é um mundo de ideias criado pelos seres humanos e que existe na consciência partilhada destes seres. Tal como os objectos materiais têm as suas próprias propriedades, também essas ideias têm propriedades objectivamente suas. O método para descobrir estas propriedades é a construção de demonstrações e contra-exemplos.

Considerar desta forma os objectos matemáticos tem várias consequências filosóficas.

Em primeiro lugar, como refere Hersh, "dizer que os objectos matemáticos são inventados ou criados pelo homem é distingui-los de objectos naturais como rochas, raios X ou dinossauros" (50). Contudo, tal não significa que sejam objectos intemporais como as ideias matemáticas do platonismo. Com efeito, pode dizer-se que as geometrias não euclidianas são objectos matemáticos de invenção mais recente do que a geometria euclidiana.

Em segundo lugar, referir que os objectos matemáticos são produzidos como resposta a desafios colocados tanto por teorias e conceitos matemáticos já existentes, como pelas outras ciências e pelo mundo real, evidencia a complementaridade do que vulgarmente se designa por matemática pura e matemática aplicada, e conduz a questionar a pertinência da clivagem, frequentemente estabelecida, entre estes dois 'tipos' de matemática.

Com efeito, ao longo da história a matemática tem-se desenvolvido a partir de um movimento simultaneamente interno e externo. Por movimento interno entende-se um movimento que não tem na sua origem o objectivo de encontrar objectos matemáticos úteis à resolução de problemas colocados pelo dia a dia ou por outras ciências. Frequentemente, o movimento interno é motivado por desafios estéticos, por curiosidade intelectual, por necessidade de organizar, de uma forma coerente, os resultados já obtidos. O movimento externo tem por objectivo a descrição, a previsão e a compreensão de situações e fenómenos reais com vista a aumentar a possibilidade de intervenção na realidade. Neste contexto, a actividade de modelação matemática, ou seja, a actividade de "construção de modelos quantitativos de relações não quantitativas" (51), adquire uma importância fundamental.

Permanece, contudo, a questão de saber porque é que longas cadeias de raciocínios puramente matemáticos dão lugar a conclusões frequentemente tão aplicáveis. Poder-se-á dizer que os seres humanos vivem num mundo e que todas as suas ideias, os conceitos, os axiomas que constroem ou inventam são, em última análise, sugeridos por esse mundo. Esta é, no entanto, uma resposta muito simplista.

Uma reflexão aprofundada sobre esta questão constitui um dos grandes desafios que actualmente se coloca, não só à filosofia da matemática mas também à história, à sociologia e à psicologia da cognição.

A compreensão do facto de os objectos matemáticos terem propriedades independentes do nosso conhecimento acerca delas, pode ser iluminada pela teoria dos três Mundos de Popper.

De facto, Popper considera que o Mundo 3, embora só existindo porque existem homens, tem uma relativa autonomia, ou seja, existem aí factos que, conquanto surjam como consequência de invenções humanas, se impõem independentemente das vontades dos homens. Popper, referindo-se especificamente à matemática, indica que há, nesta ciência, construções que são invenções (produtos do espírito humano) e problemas e teorias que são consequências objectivas, e talvez nunca pensadas, dessas construções. "O mundo da matemática contém pois uma parte autónoma do Mundo 3" (52).

Tymoczko (53) refere que, embora o que designa por realismo e construtivismo pareçam posições incompatíveis entre si no quadro filosófico tradicional relativo à matemática, nenhuma delas é incompatível com o quasi-empiricismo.

De facto, o quasi-empiricismo é contínuo com o construtivismo: ambos partem da prática matemática real. A diferença é que o quasi-empiricismo vê as construções dos matemáticos mais como produtos sociais, enquanto que o construtivismo as vê em termos mais estritamente matemáticos. O quasi-empiricismo é "mais tolerante a práticas diversas" (54).

Além disso, também o quasi-empiricismo dificilmente fecha a porta ao realismo. Com efeito, a autonomia reconhecida por Popper à matemática, e a terceira propriedade do conhecimento matemático explicitada por Hersh, evidenciam bem que os objectos matemáticos, uma vez criados, têm propriedades bem determinadas, que podemos ser ou não capazes de descobrir, mas que possuem independentemente disso.

Recordando uma analogia referida por Tymoczko (54), a compreensão filosófica de astronomia pode avançar pondo a ênfase na prática da astronomia, no papel dos astrónomos, dos telescópios e assim por diante, sem contudo negar que esta prática é condicionada por um universo de objectos astronómicos. Do mesmo modo se pode explorar o quasi-empiricismo sem negar o realismo na filosofia da matemática.

É interessante salientar que Putnam (55), um filósofo actual que contesta o carácter *a priori*, absoluto e certo do conhecimento matemático, referindo que este conhecimento é quasi-empírico, falível e provável, (re)interpretou o realismo no contexto da filosofia da matemática, distanciando-o de questões fundacionistas e de questões relativas à existência intemporal de objectos matemáticos. A este propósito o autor escreve:

> "Um realista (quer se refira a uma dada teoria ou discurso) sustenta que (1) as afirmações dessa teoria ou discurso são verdadeiras ou falsas; e (2) que o que as torna verdadeiras ou falsas é algo de externo - ou seja, não são (em geral) os dados provenientes dos nossos sentidos, actuais ou potenciais, ou a estrutura da nossa mente, ou a nossa linguagem, etc. " (56).

É de notar que, segundo esta formulação, é possível ser realista, relativamente ao discurso matemático, sem haver compromisso pessoal com a existência de objectos matemáticos. A questão do realismo, entendido desta forma, torna-se, assim, como Kreisel (57) a colocou, a questão da objectividade da matemática e não a questão da existência de objectos matemáticos.

O quasi-empiricismo, enquanto abordagem filosófica, não dá resposta a todos os problemas respeitantes à filosofia da matemática. No entanto, mais importante que isso, permite levantar questões fundamentais:

• Como são inventados os objectos matemáticos?

• Como explicar o sucesso das aplicações da matemática na compreensão do mundo físico e de outras ciências?

• Que balanço fazer quanto às diferenças entre os produtos matemáticos e outros produtos culturais?

• O grau de constrangimento da criatividade matemática será superior ao da criatividade artística?

• Como é que a demonstração matemática se torna mais refinada e subtil à medida que são descobertas novas fontes de erro?

• Como se articula a produção individual do conhecimento matemático com o reconhecimento social deste conhecimento?

• Bastará a refutação de uma teoria e o desenvolvimento de uma outra em sua substituição, para que esta seja incorporada na matemática socialmente reconhecida?

• O que constituirá matemática válida?

• As normas e convenções partilhadas pelos membros da comunidade matemática serão inteiramente explícitas?

Estas são algumas das muitas questões que poderão ajudar a compreender melhor o que é, e como progride, a matemática.

A sua análise em profundidade requererá, não só a observação das actuais práticas dos matemáticos, mas também, e muito particularmente, estudos históricos.

Aliás, no âmbito da filosofia da ciência, os trabalhos de Popper e Kuhn ilustram bem a importância destes estudos. E foi também um estudo de caso feito com base na história que permitiu a Lakatos mostrar a natureza falível do conhecimento matemático e reconceptualizar a matemática como uma construção pessoal e social.

A observação da actividade real dos matemáticos bem como estudos históricos nunca mostrarão, com certeza, a matemática como um corpo de verdades e certezas indubitáveis...

Mas porque deveria ser a matemática indubitável?

3 - A experiência matemática

Uma vez admitida a ideia de que a filosofia da matemática deve ter em conta a prática matemática real, levanta-se a questão de como caracterizar esta prática.

Como se viu, para o senso comum uma resposta frequente é que esta prática consiste na demonstração de teoremas a partir da elaboração de raciocínios lógicos e dedutivos. Mesmo para o próprio Hilbert, matemático formalista convicto, a matemática 'coincidia' com demonstração.

A reflexão sobre o saber matemático apresentada até aqui, quer ao longo do primeiro capítulo da terceira parte deste trabalho, quer das secções já desenvolvidas no segundo capítulo, procurou evidenciar que a experiência matemática é, na verdade, muito mais ampla do que a actividade de demonstração de teoremas. As actividades de resolução de problemas, de modelação matemática e de argumentação matemática estiveram presentes desde sempre na actividade matemática real (58).

O que se segue procura reflectir, mais de perto, sobre alguns aspectos da experiência matemática, tendo por contexto os trabalhos de Legroux e Lerbet referentes aos conceitos de informação, saber e conhecimento (59), bem como reflexões elaboradas por alguns matemáticos sobre facetas particulares da sua própria experiência matemática.

3.1 - <u>Conhecimento, saber e informação</u>

Legroux (60), a partir dos trabalhos de Dewey que distinguiam a informação, externa à pessoa, do conhecimento, que lhe era interno, introduziu o conceito de *saber* a que conferiu uma função de mediação entre a *informação* e o *conhecimento*. Para este autor, a *informação* é de ordem social, pertence aos outros e é exterior ao sujeito. O *conhecimento* é de ordem pessoal, é inefável e incomunicável e está integrado no sujeito ao ponto de se confundir com ele. Entre os dois pólos, e como um lugar de passagem obrigatória entre ambos, situa-se o *saber*, que não é nem informação, nem conhecimento, mas um pouco das duas coisas.

Relativamente ao *saber*, Legroux começa por referir que este conceito tem sensivelmente o mesmo sentido que o de conhecimento quando se trata de dados a adquirir, a reter na memória, a possuir. Os dois conceitos podem definir-se como sendo "o que contribui para a instrução, para a erudição" (61). Estabelece, no entanto, diferenças significativas entre eles. O saber é provisório, de natureza intelectual e objectiva para o sujeito e parece pertencer apenas ao domínio cognitivo: "fala-se de saber quando se trata de um conjunto de dados sistematizados, organizados por uma actividade intelectual" (62). O conhecimento é um saber vivido e integrado pela totalidade da pessoa. É de ordem "afectiva-cognitiva", resiste à passagem do tempo e não é completamente transmissível (63).

Lerbet retém, dos trabalhos de Legroux, que a função do saber é a de transformar aquilo que não é em comunicável (conhecimento) naquilo que o é totalmente (informação). Acrescenta que o saber é um produto que "apenas tem realidade na sua comunicabilidade transitória" (64), alimentando "mais complexidade interrogativa do que propondo soluções imediatas" (65).

Olhando estes conceitos à luz da teoria dos três mundos de Popper, poder-se-ia dizer que, enquanto a informação e o saber pertencem ao Mundo 3, o conhecimento pertence ao Mundo 2.

Admitir o conceito de conhecimento proposto por Legroux, e pensar na matemática como uma ciência a par das outras, permite destacar algumas vertentes da experiência matemática.

Em primeiro lugar, o conhecimento matemático de cada um não pode comunicar-se aos outros na sua totalidade uma vez que a sua transformação em saber e a deste em informação originam perdas informativas importantes. Assim, e por um lado, a informação matemática que aparece escrita em livros, manuais, publicações, ou que é dita em colóquios, conferências, salas de aula, corresponde apenas a uma parte do conhecimento matemático que, sobre os temas tratados, possuía quem a escreveu ou disse. Por outro lado, a informação aí explicitada esconde muitos aspectos fundamentais da actividade criativa que esteve na base da sua origem e produção, o que poderá dificultar a compreensão dessa informação.

Em segundo lugar, a ênfase na prática matemática real, proposta pelo quasi-empiricismo, acarreta consigo a ênfase na comunidade matemática. É aí que o conhecimento matemático subjectivo, transformado em saber, é publicamente explicitado, podendo, assim, constituir-se em informação matemática socialmente partilhada e reconhecida, e originar problemas e ideias novas. Por sua vez, é esta informação que, ao ser interiorizada e reconstruída pelos membros da comunidade, vai permitir a criação de novo conhecimento matemático.

Neste contexto, a distinção entre a informação matemática objectiva e o conhecimento subjectivo faz emergir a linguagem e a comunicação entre os membros da comunidade matemática como vertentes indispensáveis e fundamentais à produção matemática.

Como Hersh refere, os objectos matemáticos tornam-se parte da cultura humana e é pela partilha, confronto e discussão crítica de ideias relativas a esses objectos que se torna possível o reconhecimento de saberes matemáticos novos, a correcção de erros, o levantamento de novos problemas, o alargamento, correcção e, mesmo, rejeição de teorias. "As propriedades dos objectos matemáticos são também propriedades de ideias partilhadas" (66).

A prática matemática torna-se, assim, uma actividade pública. Esta atitude contrasta francamente com a das escolas fundacionistas que consideram que o fundamental da actividade matemática se situa na mente do indivíduo, sendo a prática pública apenas um sintoma desta prática privada. Deste modo, o conhecimento matemático, como qualquer outra forma de conhecimento, sendo permanentemente reorganizado e enriquecido através de interacções múltiplas que a Pessoa (67), enquanto sistema aberto, estabelece com contextos diversos exteriores a ela, é influenciado não apenas por aspectos inerentes a quem o constrói, mas também por condições políticas, sociais e culturais.

Em terceiro lugar, e mesmo que a essência da actividade matemática fosse a actividade de demonstração, o que, como se viu, constitui uma perspectiva redutora da prática matemática real, a verificação de demonstrações, enquanto actividade pública, seria "um processo social elaborado que deriva dos cânones e paradigmas de uma comunidade particular de peritos" (68). Esta actividade envolveria, portanto, factores extra-lógicos que estariam profundamente enraizados, nomeadamente, na comunicação, na explicação de resultados, na educação dos peritos.

Torna-se, pois, pertinente considerar a hipótese do conhecimento matemático, sendo um saber vivido e integrado pela totalidade da pessoa, não ser apenas intelectualmente organizado, lógico e cognitivo. A sua construção, a par de factores lógicos, do determinado, do cognitivo e do objectivo, poderá também envolver factores extra-lógicos, o aleatório, o afectivo e o subjectivo.

A existência de uma face extra lógica nos processos de criação do conhecimento matemático é reconhecida, nomeadamente, por Papert, num artigo intitulado *L'Inconscient Mathématique*.

3.2 - A face lógica e a face extra- lógica da matemática

Em *L'Inconscient Mathématique* (69), Papert rejeita a dicotomia que opõe um estereotipo de matemática desumanizada e apenas lógica à diversidade de actividades que apelam à sensibilidade humana. Salienta que a matemática é vulgarmente olhada segundo um ângulo que exagera fortemente o seu lado lógico e propõe-se mostrar, a partir da análise da actividade matemática feita por Poincaré, que nesta disciplina, tal como em qualquer outra actividade humana, a face extra-lógica coabita com a face lógica.

Na face lógica Papert inclui todas as teorias lógicas que consideram a matemática como independente e autónoma, ou seja, como um domínio destacado dos outros que se justifica por critérios de validade definidos de maneira formal. Na face extra-lógica inclui a beleza matemática, o prazer matemático e a intuição matemática.

3.2.1 - Estética e matemática

Papert refere que, para Poincaré, o traço distintivo do espírito matemático não é a lógica mas a estética, uma vez que é o sentido estético que guia o matemático no seu trabalho de criação.

Segundo Poincaré (70), o matemático, quando confrontado com um problema, desenvolve um trabalho que pode ser decomposto em três fases:

- A primeira é uma etapa de análise consciente e deliberada da situação a resolver. Se esta situação é difícil, nunca se encontrará a solução nesta etapa.
- A segunda é uma fase de trabalho inconsciente. Parece um abandono provisório da tarefa. No entanto, o que se passa é que o inconsciente, "máquina combinatória emocionalmente neutra e de uma lógica suprema" (71) explora sistematicamente, resistindo aos aborrecimentos, às distracções e às tentativas de mudar de objectivo, todos os elementos que lhe foram fornecidos pela primeira etapa do trabalho. Após um certo tempo, num momento qualquer em que o espírito consciente se afaste das actividades relativas ao problema a resolver, o produto do trabalho do inconsciente aparece no espírito consciente.
- Numa terceira etapa, o matemático examinará consciente e rigorosamente os resultados obtidos pelo inconsciente. Estes poderão ser aceites, modificados ou rejeitados. Neste último caso, o inconsciente recomeçará de novo o seu trabalho combinatório na procura de uma nova solução.

Coloca-se, contudo, a questão de porque é que o inconsciente transmite ao consciente alguns resultados e outros não. É aqui que Poincaré vê a intervenção do sentido estético. É este sentido que apenas deixa passar para o consciente as ideias que trazem a marca da beleza matemática. Para ele este sentido é inato, só o possuindo aqueles que "nascem matemáticos" (72).

Segundo Papert, Poincaré, ao contestar que seja possível compreender o trabalho do matemático e os processos que ele utiliza exclusivamente em termos de lógica, o que "refuta, no fundo, é o afastamento da beleza na psicologia das funções cognitivas, definidas pela sua oposição às considerações afectivas" (73).

Se por um lado Papert apoia Poincaré, opondo-se à hipótese de uma teoria puramente cognitiva do pensamento matemático, por outro interroga-se sobre a validade de considerar a existência do sentido estético, facilitador da actividade matemática, apenas naqueles que nascem matemáticos criadores.

Coloca pois a questão de se as componentes extra-lógicas da estética e do prazer matemáticos não estarão presentes no pensamento matemático desenvolvido por um qualquer mortal. Assim, procurou analisar se o processo descrito por Poincaré tinha algumas semelhanças com o processo seguido por um grupo de não matemáticos a quem foi pedido para reflectir em voz alta e construir a demonstração do teorema que indica que a raíz quadrada de dois é um número irracional. Este teorema foi escolhido exactamente por Hardy o ter considerado "como um dos mais puros exemplos de beleza matemática" (74).

Papert, ao longo do processo de resolução do problema proposto, constata, no grupo, a existência de sinais diversos de satisfação e entusiasmo, traços de prazer vários, que o levam a questionar-se se a matemática não estará mais próxima do humor, dos fantasmas e dos sonhos do que aquilo que geralmente se crê. Constata ainda que, perante demonstrações matemáticas, algumas pessoas são seduzidas pelo lado imediato e brilhante; outras pelo lado sério; outras ainda pelo sentido único que uma demonstração toma por si própria uma vez admitidos uns poucos conhecimentos elementares; este sentido único pode originar desistência e constrangimento em alguns, atracção e prova de poder noutros.

Tudo isto leva-o a colocar uma série de dúvidas sobre as razões que conduzem a acreditar, como o faz Poincaré, que a faculdade de sentir beleza matemática é inata e independente de outras componentes do espírito; sugere, pois, a possibilidade de que factos esquecidos por este matemático entrem em linha de conta e venham a influenciar, em cada pessoa, a percepção da matemática como bela ou não, levando-a a aprovar ou a rejeitar 'esta' ou 'aquela' matemática.

A presença da estética e a importância do trabalho do inconsciente são também aspectos da experiência matemática salientados por Revuz (75). Este autor, ao reflectir sobre a actividade de demonstração matemática, salienta que, nesta actividade, o inconsciente parece ser mais capaz que o consciente de alcançar uma percepção global do processo dedutivo complexo e, por isso, apesar de não ser infalível, talvez esteja mais apto a agarrar as linhas essenciais da dedução. Assim, uma parte importante do pensamento matemático desenrola-se, segundo este autor, no inconsciente.

Relativamente à estética Revuz indica que a opinião, por vezes ouvida, de que a matemática é uma arte, tem subjacente uma componente que está, sem dúvida, presente numas teorias e noutras não: a beleza matemática. Este autor salienta que o que há de comum na estética de todas as artes e da matemática "é o desaparecimento de informações parasitas, de barulhos de fundo, numa palavra a diminuição da entropia" (76). Acrescenta ainda que a beleza se fundamenta, em parte, na transparência e na evidência, entendida não como sinónimo de facilidade, mas como manisfestação da alegria profunda sentida perante uma teoria, construída após laboriosa pesquisa, que introduziu ordem e luz onde reinava a obscuridade e a confusão.

Nas suas palavras:

> "É uma beleza que se prende com a organização interna da teoria, mais viva e mais flexível que a de um edifício, mais perto talvez da da música (...) A comparação de um belo raciocínio com a dança em que cada movimento termina o precedente e inicia o seguinte não é destituída de valor" (76).

Apesar de poder questionar-se a existência de um inconsciente emocionalmente neutro (77) e a exclusividade da presença do sentido estético apenas nos 'que nascem matemáticos', as análises de Papert, Poincaré e Revuz sobre a actividade de produção matemática, evidenciam que há diversos factores não cognitivos intrinsecamente envolvidos nos processos pessoais de produção do conhecimento matemático.

E, apesar das diversas tentativas para decompôr a estética matemática se terem revelado infrutíferas, permanecendo a dificuldade em compreender o que é esta componente e de que modo ela intervém no pensamento matemático de cada sujeito (78), parece inegável a importância da estética como um dos diversos aspectos que, de algum modo, faz parte da experiência matemática real e que influencia o rumo do desenvolvimento da actividade matemática. Como Schoenfeld, salienta "tornar-se matemático inclui o desenvolvimento da estética matemática, uma predilecção por analisar e compreeender, por perceber a estrutura e as relações estruturais, por ver como as coisas se ajustam" (79).

3.2.2 - Intuição e matemática

Incluída na face extra-lógica da matemática referida por Papert, aparece a intuição. Poincaré, ao referir que "ciência alguma pode nascer apenas da lógica" (80) e que a ciência da demonstração não é toda a ciência, devendo a intuição "conservar o seu papel como complemento (...) [ou mesmo] como antídoto da lógica" (81), põe a tónica em que o conhecimento matemático não se esgota nos processos dedutivos. Ao salientar que, sem a intuição, "os espíritos ainda jovens não teriam meios de ter acesso ao entendimento da matemática, não aprenderiam a gostar dela (...) e sobretudo nunca viriam a ser capazes de aplicar matemática" (81), chama a atenção para o importante papel que tem a intuição, não apenas para o matemático criador, mas em todo o processo de aprendizagem da matemática.

Este matemático faz ressaltar que todo o inventor necessita de uma visão de conjunto, de uma faculdade que lhe permita ver à distância e essa faculdade não pode ser a lógica. "Em matemática, a lógica chama-se análise e análise quer dizer divisão, dissecação" (82). Possibilita a visão da parte, não do todo. Assim, para Poincaré, se a lógica pode fornecer a certeza (é o instrumento da demonstração) a intuição é o instrumento da invenção, o que torna estas duas componentes indispensáveis à actividade de produção matemática.

Relativamente a esta actividade há mesmo alguns autores que acentuam a ideia de que a criação matemática é, sem dúvida, a obra de homens notáveis pela sua intuição mais do que pela sua capacidade de realizarem demonstrações rigorosas. Entre estes autores encontra-se Kline, que indica, nomeadamente, que "quando um matemático se pergunta porque deverá ser válido um determinado resultado, a resposta que procura consiste numa compreensão intuitiva" (83).

Põe-se, contudo, a questão de o que entender por intuição.

Poincaré distingue a intuição que faz apelo aos sentidos e à imaginação, a intuição que permite a generalização por indução (decalcada do modo de proceder das ciências experimentais), e a intuição do número puro (indução matemática), indicando que todas são importantes para o progresso da ciência (84).
Davis e Hersch (85) referem que a matemática nem sempre procede por meio de símbolos abstractos, considerando, por isso, conveniente dividi-la em duas categorias: a analítica e a analógica. Se a abordagem analítica apela à capacidade de dedução e à subdivisão das dificuldades encontradas em dificuldades parcelares que serão resolvidas passo a passo, a abordagem analógica de um problema apela à intuição e compreensão global.

Há assim, segundo estes autores (86), uma semelhança fascinante, embora especulativa, entre estes dois tipos de abordagem matemática e as funções dos dois hemisférios cerebrais. O hemisfério esquerdo está em quase toda a gente relacionado, principalmente, com comportamentos baseados na linguagem e com capacidades cognitivas que poderiam chamar-se, grosseiramente, analíticas ou lógicas. O hemisfério direito é superior ao esquerdo em quase todas as capacidades espaciais, visuais e globais. Davis e Hersch salientam que a matemática usa os talentos que se encontram em ambos os hemisférios, em vez de estar restrita às especialidades linguísticas e analíticas do hemisfério esquerdo.

Assim sendo, a ênfase exclusiva em tarefas matemáticas que menosprezem os aspectos visuais, intuitivos e não verbais do pensamento, para lá de constituir uma parente pobre da experiência matemática real pode funcionar também, para algumas pessoas, como uma barreira inibidora da construção do conhecimento matemático, privilegiando apenas aquelas que preferem abordagens analíticas dos problemas.

Em suma, a análise anteriormente apresentada sobre a actividade matemática evidencia que, além dos factores lógicos, há também diversos factores extra-lógicos intrinsecamente envolvidos nos processos de produção do conhecimento matemático.

Deste modo, torna-se pertinente considerar a hipótese do conhecimento matemático se ir construindo numa relação de exploração mútua entre o estético, o imagético, o lógico, o afectivo, o cognitivo. Se se deixar de querer mostrar uma matemática infalível e cheia de certezas talvez haja espaço para que a ênfase no cognitivo seja complementada com a ênfase em aspectos do pensamento matemático que, não sendo cognitivos, constituem também parte importante da experiência matemática real.

Nota conclusiva

No início do séc. XX e no âmbito da filosofia das ciências, Reichenbach (87) introduziu uma distinção radical entre o que se designou por *contexto da descoberta* e por *contexto da justificação*. A distinção entre estes dois contextos encontrou diversos opositores entre os filósofos da ciência contemporâneos, entre os quais se contam Kuhn, Popper e Lakatos, que questionaram fortemente a concepção que limitava a filosofia da ciência a um processo de reconstrução racional independente do processo de descoberta.

Começou, assim, a acentuar-se a ideia de que o conteúdo cognitivo das ciências não podia separar-se do contexto social, psicológico, filosófico e económico em que ocorre a produção científica, e que o objecto das ciências era, em larga medida, formado pela sua própria história que lhe é, apenas, parcialmente interna.

É neste contexto filosófico relativo à ciência em geral, onde Popper e Kuhn acentuam que uma teoria científica não pode ser provada, questionam o excesso de formalização da ciência e evidenciam a preocupação de encontrar uma epistemologia que se inspire, não em supostos fundamentos, mas no processo real de produção de conhecimento científico, que Lakatos distingue as teorias euclidianas das teorias quasi-empíricas. Lakatos inclui a matemática nas ciências quasi-empíricas e propõe o falibilismo como uma nova perspectiva filosófica para a matemática.

O quasi-empiricismo, enquanto abordagem para a filosofia da matemática inspirada no falibilismo de Lakatos, procura (re)caracterizar a experiência matemática a partir da análise da prática real dos matemáticos. Embora não dando resposta a todos os problemas, permite levantar questões pertinentes, esquecidas por tradicionais perspectivas filosóficas absolutistas.

Se nos situarmos numa perspectiva filosófica quasi-empiricista e considerarmos que a matemática é uma actividade humana de resolução de problemas, actividade essa simultaneamente individual e social, em que a construção do conhecimento subjectivo está intimamente ligada à produção de informação matemática objectiva e publicamente partilhada, então os "contextos de descoberta" (criação) e "justificação" estão intimamente entrelaçados.

Nesse âmbito, no processo global de produção matemática, a comunicação entre os membros da comunidade matemática constitui uma actividade fundamental.

Observando mais de perto a actividade de produção matemática, torna-se pertinente considerar a hipótese de que, em todos quantos fazem matemática, há factores extra-lógicos que, interagindo com factores lógicos, fazem do processo de construção do conhecimento matemático um processo em que aspectos analíticos, conscientes, racionais e cognitivos coexistem com aspectos intuitivos, inconscientes, estéticos e afectivos, organizando-se todos eles, em cada pessoa, de uma maneira singular.

Notas

(1) GIL (F.), 1979, "História das Ciências e Epistemologia: Apresentação do Debate Popper-Kuhn", in História e Prática das Ciências, Lisboa, Biblioteca de Filosofia 2, A Regra do Jogo, p.165.

(2) Ibid, p.166.

(3) Ibid. Fernando Gil, nas pp.168,169, escreve: "A historicidade encontra-se inscrita no tecido das ciências, não é contingente em relação a elas. Inversamente, como as ciências se alargam para lá da sua esfera de origem (...) também a interioridade das ciências se converteu em exterioridade (social)."
No mesmo artigo, p.168, este autor refere que pode dizer-se que as premissas da mudança de direcção na discusão epistemológica estão "contidas na célebre fórmula de Bachelard, *le fait est surfait*, (itálico no original) na tese que a objectividade representa o produto de uma construção colectiva e individual".

(4) As referências para a apresentação das ideias de Popper e Kuhn sobre a ciência em geral foram, fundamentalmente, constituídas pelas seguintes publicações:
- CARRILHO (M.), 1988, "Kuhn e as Revoluções Científicas", in Colóquio/Ciências, Revista de Cultura Científica, Nº2, Lisboa, Fundação Gulbenkian;
- CHARLESWORTH (M.), 1986, Science, Non Science & Pseudo-Science, National Library of Australia, Deakin University Press;
- GIL (F.), 1979, ibid, pp.165-182;
- KUHN (T.), 1970, The Structure of Scientific Revolutions, Second Edition, Enlarged, Chicago, The University of Chicago Press;
- KUHN (T.), 1989, A Tensão Essencial, Lisboa, Edições 70;
- POPPER (K.), 1974, (1ª edição), A Lógica da Pesquisa Científica, Edição 4-5-6-7-8-9, Ano 89-90-91-92-93, São Paulo, Editora Cultrix Ltda;
- POPPER (K.), 1987, Sociedade Aberta Universo Aberto, Lisboa, Dom Quixote;
- POPPER (K.), 1988, Universo Aberto - Pós-escrito à Lógica da Descoberta Científica, Lisboa, Dom Quixote;
- POPPER (K.), 1989, Em Busca de um Mundo Melhor, Lisboa, Fragmentos.

(5) POPPER (K.), 1974, ibid, p.90, utiliza a definição de teoria empírica para explicitar o sentido que atribui ao conceito de *falsificador potencial*.
Para Popper, uma teoria empírica é aquela que é capaz de "sem ambiguidade dividir a classe de todos os enunciados básicos nas seguintes duas subclasses não vazias:
- (...) a classe de todos os enunciados básicos com os quais é incompatível (ou que rejeita, ou proíbe): a essa classe chamamos classe de *falseadores potenciais* da teoria;
- (...) a classe de enunciados básicos que ela não contradiz (ou que ela 'permite')".

Na mesma obra, p.45, designa por *enunciado básico* ou *proposição básica* um enunciado que pode actuar como permissa numa falsificação empírica, ou seja, o enunciado de um facto singular.

(6) POPPER (K.), 1987, op. cit., pp.24-34.

(7) POPPER (K.), 1989, op. cit., p.58.

(8) Referências ao Mundo 1, Mundo 2 e Mundo 3 encontram-se por exemplo em:
- LERBERT (G.), 1986, De la Structure au Systéme, Éssai sur l'Evolution des Sciences Humaines, U.N.M.F.R.E.O., Éditions Universitaires, pp.28-33;
- POPPER (K.), 1987, op. cit.;
- POPPER (K.), 1988, "O indeterminismo não basta, Um posfácio", in Universo Aberto - Pós-escrito à Lógica da Descoberta Científica, op. cit., pp.115-128.

(9) POPPER (K.), 1988, ibid, p.119.

(10) CARRILHO (M.), 1988, op. cit., p.48, refere-se a estes conceitos como os centrais na nova concepção de ciência proposta por Kuhn.

(11) Expressão utilizada por GIL (F.), 1979, op. cit., p.175.

(12) KUHN (T.), 1970, op. cit., p.10.

(13) GIERE (R.), 1989, "A Natureza da Ciência - Uma perspectiva iluminista pós-moderna" in Colóquio/Ciências, Revista de Cultura Científica, Nº6, Lisboa, Fundação Gulbenkian, refere na p.76 que este é o significado central do conceito de paradigma que aparece logo nas primeiras páginas da Estrutura das Revoluções Científicas (Structure of Scientific Revolutions).
São de salientar as críticas feitas a Kuhn relativamente à imprecisão deste conceito. CARRILHO (M.), 1988, op. cit., p.48, refere que Margaret Masterman recenseou, para o conceito de paradigma, vinte e uma acepções distintas. O próprio Kuhn, em obras posteriores a *The Structure of Scientific Revolutions*, considera que este conceito foi usado nessa obra com dois significados diferentes: um em que "o sentido de paradigma é global abarcando todos os empenhamentos partilhados

por um grupo científico" e o outro que designa por "matriz disciplinar" e que constitui um subconjunto do primeiro. Ver KUHN (T.), 1989, "Reconsiderações acerca dos Paradigmas" in A Tensão Essencial, op. cit., p.354. Sobre o conceito de "matriz disciplinar" ver, por exemplo a mesma obra p.358. Na p.355 Kuhn escreve: "um paradigma é o que os membros de uma comunidade científica, e só eles, partilham entre si".

(14) KUHN (T.), 1970, op. cit., no texto em inglês, designa esta actividade por "puzzle solving". Pela leitura do capítulo IV do livro The Structure of Scientific Revolutions, intitulado "Normal Science as Puzzle Solving", pp.35-42, (em especial na p.38) destaca-se que um enigma é um problema que tem solução e que respeita determinadas regras quanto à natureza desta solução e quanto aos processos de a atingir. Na p.79, Kuhn referencia que todo o problema que a ciência normal vê como um enigma (puzzle) pode ser visto, de um outro ponto de vista, como um contra exemplo e portanto como a origem de uma crise científica.

(15) Ibid. Sobre o conceito de anomalia ver, nomeadamente, o cap. VI, pp.52-65.

(16) Ibid, p.53.

(17) Ibid, p.12.

(18) CARRILHO (M.), 1988, op. cit., p.47, referindo Kuhn.

(19) Ibid, p.45, refere que esses limites são ao mesmo tempo institucionais, sociais e cognitivos.

(20) KUHN (T.), 1989, op. cit., p.24. É no texto original que a palavra grupo aparece em destaque.

(21) Ver por exemplo:
- GIL (F.), 1979, op. cit., pp.176-179.
- KUHN (T.), 1989, op. cit., pp.323-352.

(22) KUHN (T.), ibid, p.338.

(23) Ibid, p.324.

(24) POPPER (K.), 1987, Sociedade Aberta Universo Aberto, Lisboa, Dom Quixote, p.68.

(25) KUHN (T.), 1989, op. cit., p.356.

(26) Ver CARRILHO (M.), 1988, op. cit.; GIL (F.), 1979, op. cit.; GIERE (R.), 1989, op. cit. Nomeadamente este último autor refere, na p.78 que Imre Lakatos é um bom exemplo de um filósofo influenciado profundamente por Kuhn, mas ao mesmo tempo extremamente crítico das suas ideias.

(27) Referido por GARCIA (R.), PIAGET (J.), 1987, Psicogénese e História das Ciências, Lisboa, Publicações Dom Quixote, pp.239,240.
Reflexões sobre o conceito de programa de investigação de Lakatos, são apresentadas, entre outros, pelos seguintes autores:
- CARRILHO (M), ibid, p.49;
- GIERE (R), ibid, p.78;
- GIL (F), 1979, op. cit., pp.176,177.

(28) DAVIS (P.), HERSH (R.), 1988, "Da Certeza à Falibilidade" in Cadernos de Educação e Matemática, Nº1, A Natureza da Matemática, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, p.63.

(29) É a tradução francesa de "Proofs and Refutations", ou seja, Preuves et Réfutations, Essai sur la Logique de la Découverte Mathématique, que servirá como ponto de partida para as referências que, neste trabalho de investigação, forem feitas a esta obra de Lakatos.
Os tradutores, Balacheff e Laborde, tiveram não só o cuidado de confrontarem o texto de "Proofs and Refutations" de 1976 com a tese original sustentada por Lakatos e uma sequência de quatro artigos publicados a partir da mesma tese (no "British Journal for the Philosophy of Science") como ainda se preocuparam em consultar os textos originais, relativamente às numerosas citações feitas por Lakatos.
Numa síntese biográfica sobre Lakatos apresentada na tradução francesa de "Proofs and Refutations", Balacheff e Laborde referem que, a partir de 1957, Lakatos consagrou-se à redacção da sua tese de Ph. D. intitulada "Essays in the Logic of Mathematical Discovery" que defendeu em 1961 e de que publicou uma segunda versão em 1963-64 sob o título de "Proofs and Refutations".
Ver LAKATOS (I.), 1984, Preuves et Réfutations, Essai sur la Logique de la Découverte Mathématique, Paris, Hermann, pp.xi,xii.

(30) Referido por DAVIS (P.), HERSH (R.), 1988, op. cit., pp.63,64.

(31) LAKATOS (I.), 1984, op. cit., p.5.

(32) Ibid, p.11.

(33) LAKATOS (I.), 1986, "A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics?" in TYMOCZKO (T.), 1986, New Directions in the Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, pp.29-48.
(34) Hilbert, citado por LAKATOS (I.), 1986, ibid, p.35. Sobre a distinção estabelecida por Lakatos entre teorias euclidianas e quasi-empíricas ver LAKATOS (I.), 1986, ibid, pp.33-35.
(35) LAKATOS (I.), 1986, ibid, p.34.
(36) Ibid, p.39. Recorde-se que no seu livro "Proofs and Refutations", nas tentativas que Lakatos apresenta para a demonstração da Regra de Euler, os contra-exemplos conduzem à adaptação de demonstrações, axiomas e definições, havendo retransmissão da falsidade (em lugar da transmissão de verdade) característica essencial dos sistemas quasi-empíricos.
(37) DAVIS (P.), HERSH (R.), 1988, op. cit., pp.65,66.
(38) Sobre este problema Lakatos refere que estudos de caso histórico-críticos poderão ajudar a iluminar esta questão, acrescentando que, seja qual for a sua solução, os conceitos 'naive' de *a priori* - *a posteriori*, analítico-sintético, na medida em que estão intrinsecamente ligados à epistemologia clássica, não poderão oferecer um guia adequado à compreensão do desenvolvimento das teorias quasi-empíricas. Ver LAKATOS (I.), 1986, op. cit., p.43. Sobre os métodos quasi-empíricos, Putnam escreve o seguinte:
"By 'quasi-empirical' methods I mean methods that are analogous to the methods of the physical sciences except that the singular statements which are 'generalized by induction', used to test 'theories', etc., are themselves the product of proof or calculation rather than being 'observation reports' in the usual sense."
Ver PUTNAM (H.), 1986, "What is Mathematical Truth?" in New Directions in the Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, p.51.
(39) Referido por DAVIS (P.), HERSH (R.), 1988, op. cit., p.70.
(40) Referido por BALACHEFF (N.), LABORDE (J. M.), 1984, "Introduction à l'édition française" de Preuves et Réfutations, Essai sur la logique de la Découvert Mathématique, Hermann, p.xv.
(41) TYMOCZKO (T.), 1986, "Introduction" in New Directions in the Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, p.xvi.
(42) Algumas das obras destes autores onde se evidenciam estas preocupações são as seguintes:
• DAVIS (P.), HERSH (R.), 1986, A Experiência Matemática, Rio de Janeiro, Livraria Francisco Alves Editora S. A.
• TYMOCZKO (T.), 1986, New Directions in the Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäusen. Esta Antologia contém artigos de diversos autores entre os quais se encontram Putnam, Lakatos, Pólya, Hersh e Davis.
• KLINE (M.), 1989, Mathématiques: la Fin de la Certitude, Christian Bourgois Editeur.
• ERNEST (P.), 1991, The Philosophy of Mathematics Education, Hampshire, The Falmen Press.
(43) HERSH (R.), 1986, "Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics", in New Directions in the Philosophy of Mathematics, An Anthology edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, pp.9-28. Na p.18 este autor escreve: "Falamos como formalistas quando somos compelidos a enfrentar a essência mística e anticientífica do idealismo platónico; voltamo-nos para o platonismo quando constatamos que o formalismo, como descrição da matemática, tem apenas uma semelhança longínqua com o nosso conhecimento actual da matemática".
(44) TYMOCZKO (T.), 1986, op. cit., p.xvi.
(45) KLINE (M.), 1989, op. cit., p.570.
(46) Sobre esta questão ver, por exemplo, LERMAN (S.), 1989, "A Social View of Mathematics - Implications for Mathematics Education" in Mathematics, Education and Society, Document Series No.35, Paris, Unesco, pp.42,43.
Este autor refere que a história mostra que conceitos e noções matemáticas não são a revelação gradual de verdades absolutas, mas construções sociais como quaisquer outras. Aponta por exemplo, referindo Lakatos, que o conceito de poliedro é negociado e adaptado segundo convenções e acordos, através de provas e explicações... Ou seja, não existe algures um conceito de poliedro, universalmente aceite, que precise apenas de ser descoberto e explicado.

(47) DAVIS (P.), HERSH (R.), 1986, op. cit., p.452.
(48) HERSH (R.), 1986, op. cit.
(49) Ibid, p.22.
(50) Ibid, p.23.
(51) PUTNAM (R.), LAMPERT (M.), PETERSON (P.), 1990, "Alternative Perspectives on Knowing Mathematics in Elementary Schools" in Review of Research in Education, 16, Cazden(C.), editor, Harvard University Graduate School of Education, Washington, American Education Research Association, p.99.
Sobre a actividade de modelação matemática ver as pp.107-113.
(52) A este respeito POPPER, 1988, no artigo "O Indeterminismo não Basta: Um posfácio", op. cit., pp.120,121 refere que, por exemplo, a sequência dos números naturais (0, 1, 2, 3, 4,...) é uma invenção humana, um produto do espírito humano. No entanto, nessa sequência há números (os números primos) que só têm dois divisores: a unidade e eles próprios. Esta propriedade ficou bem definida, impôs-se a partir do momento em que consideramos a existência dos números naturais e foi independente de nós. A citação encontra-se na p.121.
É de salientar que, embora Popper considere que o Mundo 3 tem uma relativa autonomia, não o vê do mesmo modo que Platão olhava o mundo das ideias. Platão considerava este mundo existente antes de haver homens, enquanto Popper refere que o Mundo 3 só existe porque existem homens, havendo aí proposições e teorias que podem ser verdadeiras ou falsas.
(53) Sobre o significado atribuído por Tymoczko a realismo e construtivismo, ver o primeiro capítulo desta primeira parte do presente trabalho.
(54) TYMOCZKO (T.), 1986, op. cit., p.xvi.
(55) Ver PUTNAM (H.), 1986, op. cit., pp.57-62.
(56) Ibid, p.57.
(57) Referido por PUTNAM (H.), ibid, p.57.
(58) Segundo Putnam, Lampert e Peterson, a actividade de resolução de problemas e a actividade de modelação estão relacionadas pela actividade de formulação de problemas. A actividade de argumentação prende-se com a produção e refutação de conjecturas matemáticas e com as decisões tomadas pela comunidade matemática relativamente à aceitação de uma conjectura como parte do saber matemático reconhecido.
Ver PUTNAM (R.), LAMPERT (M.), PETERSON (P.), 1990, op. cit., nomeadamente as pp.97-123.
(59) Sobre estes conceitos ver, por exemplo:
• LEGROUX (J.), 1981, De l'Information à la Connaissance, Maurecourt, Mesonance;
• LERBET (G.), 1984, Approche Systémique et Production de Savoir, U. N. M. F. R. E. O., Editions Universitaires, pp.88-105.
(60) LEGROUX (J.), ibid. Sobre os conceitos de *informação, conhecimento* e *saber* e suas relações, ver em particular as pp.133-143.
(61) Ibid, p.123.
(62) Ibid, pp.124,136,137. A citação encontra-se na p.124.
(63) Ibid. Na p.139 Legroux escreve que "o conhecimento confunde-se com a identidade pessoal. É de ordem afectiva-cognitiva."
(64) LERBET (G.), 1984, op. cit., p.103.
(65) Ibid, p.104.
(66) HERSH (R.), 1986, op. cit., p.24.
(67) Por Pessoa entende-se o Sistema-Pessoa referido por LERBET (G.), 1981, Une Nouvelle Voie Personnaliste: Le Système-Personne, U.N.M.F.R.E.O., Maurecourt, pp.22-53.
(68) TYMOCZKO (T.), 1986, "Mathematical Practice" in New Directions in the Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, p.127.
(69) PAPERT (S.), 1981, "L' Inconscient Mathématique" in Jaillissement de l'Esprit, Ordinateurs et Apprentissage, Flammarion, pp.237-257.
(70) Sobre a tese de Poincaré relativamente à intervenção da estética no pensamento matemático, ver PAPERT (S.), ibid, pp.243,244.
(71) Ibid, p.242.
(72) Ibid, p.237. Poincaré refere que "nasce-se matemático, não nos tornamos matemáticos". Ver POINCARÉ (H.), 1988, "Intuição e lógica em Matemática" in A Natureza da Matemática, Cadernos de Educação e Matemática, Nº 1, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, p. 7.
(73) PAPERT (S.), 1981, op. cit., p.241.
(74) Ibid, p.245.

(75) REVUZ (A.), 1980, Est-il Impossible d'Enseigner les Mathématiques?, Paris, Presses Universitaires de France, pp.40-49.

(76) Ibid, p.48.

(77) Entre outras razões, a existência de um inconsciente encarado como uma "máquina combinatória emocionalmente neutra e de uma lógica suprema", como o vê Poincaré, é questionável uma vez que tal existência levaria a considerar o inconsciente como um sistema fechado imune à influência de elementos afectivos e emocionais o que contradiz uma perspectiva sistémica e global de Pessoa. Sobre esta perspectiva ver, por exemplo, o Sistema Pessoa de Lerbet. Ver LERBET (G.), 1981, op. cit.

(78) Ver DAVIS (P.), HERSH (R.), 1986, op. cit., pp.200-202.

(79) SHOENFELD (A.), 1990, "Problem Solving in Context(s)" in The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving, third printing R. Charles & E. Silver (Eds.), Reston, Virginia, Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics, p.87.

(80) POINCARÉ (H.), 1988, "Intuição e Lógica em Matemática" in A Natureza da Matemática, Cadernos de Educação e Matemática, Nº 1, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, p.10.

(81) Ibid, p.12.

(82) Ibid, p.14.

(83) KLINE (M.), 1989, op. cit., p.571.

(84) POINCARÉ (H.), 1988, op. cit., ver em particular as pp.11,12,15,16.

(85) DAVIS (P.), HERSH (R.), 1986, "Aspectos Não-analíticos da Matemática" in A Experiência Matemática, op. cit., pp.339-355. Na p.340 os autores escrevem: É conveniente dividir a matemática consciente em duas categorias. A primeira, possivelmente a mais primitiva, será chamada "analógica-experimental", ou, resumidamente, analógica. A segunda categoria será chamada "analítica".

(86) Ibid, ver nomeadamente as pp.352-355.

(87) Referido por PIAGET (J.), GARCIA (R.), 1987, op. cit., pp.34-37.

Conclusão da Primeira Parte

Na análise feita nos dois capítulos anteriores, tentou dar-se conta das dificuldades crescentes com que os matemáticos e filósofos foram sendo confrontados na tentativa de garantir a certeza matemática e na decisão de escolher os fundamentos adequados para estabelecer 'de uma vez por todas' a consistência e infalibilidade da matemática. Um dos objectivos desta análise foi o de iluminar a situação em que, actualmente, se encontra esta ciência de modo a poder reflectir sobre novas direcções em que se desloca a filosofia da matemática.

Neste âmbito, entre matemáticos e filósofos tem vindo a ser, cada vez mais, partilhada a ideia de que qualquer descrição exclusivamente lógica e formal da matemática é uma ficção, uma lenda, pois esta ciência constitui uma actividade humana e, enquanto tal, está sujeita a todas as fraquezas e a todas as forças humanas.

O mito fundacionista começou a dar lugar à procura de novas direcções para a filosofia da matemática. Ora, pondo de parte este mito, não há justificação para que a filosofia continue a ignorar a prática real, actual e passada, dos matemáticos. Esta prática pode proporcionar, com efeito, os problemas, os dados e as soluções que possibilitem compreender melhor a matemática quer enquanto corpo de saber socialmente partilhado, quer enquanto actividade individual de produção de conhecimento.

O quasi-empiricismo representa uma abordagem filosófica não prescritiva que procura (re)caracterizar a experiência matemática a partir da observação e análise da prática matemática real.

Observando essa prática, evidencia-se que os matemáticos inventam objectos ideais e tentam descobrir factos sobre eles. Nesse processo o trabalho matemático não consiste em ir, através da lógica, de uma verdade para outra, mas "é antes um avançar por vezes às cegas ao longo de uma via tortuosa atravessando um pântano de proposições duvidosas que não são nunca nem simples e totalmente verdadeiras nem simples e totalmente falsas" (1).

Enquanto abordagem filosófica, o quasi-empiricismo coloca a matemática a par das outras ciências. Tem por base a epistemologia falibilista proposta por Lakatos que, embora tendo fortes analogias com a filosofia da ciência proposta por Popper, dificilmente se poderá dizer que é filosoficamente incompatível com singularidades da perspectiva 'kuhniana'.

A matemática é perspectivada, nesta abordagem, como uma actividade humana, que decorre de um diálogo entre pessoas que tentam resolver problemas matemáticos, como uma ciência quasi-empírica, falível, embora fiável, corrigível, significativa, social e individualmente construída; na produção do conhecimento matemático articulam-se actividades de argumentação, de formulação e resolução de problemas oriundos da própria matemática, de outras ciências e da vida do dia a dia, desempenhando o erro, a discussão crítica e a comunicação entre os membros da comunidade matemática um papel fundamental e insubstituível.

O quasi-empiricismo parece, pois, ter capacidade para "aceitar a verdade da experiência matemática. Isso significa aceitar a legitimidade da matemática como ela é: falível, corrigível e significativa"(2).

Olhar a matemática como uma actividade humana que, apesar de falível, é fiável, mais do que considerá-la como um corpo de verdades e certezas eternas e universais, embora deixando sem resposta muitas questões filosóficas oferece, relativamente à natureza do conhecimento matemático, sua génese, produção e justificação, um balanço mais extensivo do que o proporcionado pelo platonismo.

Representa, além disso, uma alternativa nova, diferente e mais global, às anteriores perspectivas filosóficas fundacionistas. Estas perspectivas, na sua busca de fundamentos 'seguros' para a matemática, tentaram espartilhar esta ciência em visões compartimentadas e parciais omitindo muitos dos aspectos mais relevantes da actividade matemática real.

E se "compreender a ciência é não fundá-la dogmaticamente em qualquer dos princípios absolutos (...) [mas] comprendê-la enquanto prática social do conhecimento, uma tarefa que se vai cumprindo em diálogo com o mundo" (3), este novo olhar parece particularmente pertinente para um avanço nessa compreensão.

Com efeito, este olhar, qualitativamente diferente dos anteriores, ajuda a compreender que o conhecimento matemático, como todas as formas de conhecimento, representa as experiências de pessoas que interagem com ambientes particulares, periodos históricos e culturais, mais do que verdades puras e eternas residindo num reino platónico de ideias (4).

Deste modo, abrem-se as portas à hipótese do conhecimento matemático ser construido em cada sujeito num sistema não apenas lógico e cognitivo, imune a influências extralógicas, afectivas e emocionais, mas num sistema em que todos estes factores coexistem simultâneamente interagindo entre si; abrem-se as portas para que este conhecimento seja construido num processo indissociável da actividade social e psicológica do sujeito, onde objectivos funcionais no campo da matemática são atingidos fazendo intervir outros sub sistemas de um domínio exterior a este campo.

Retomando um dos objectivos que esteve na base do interesse pela epistemologia da matemática, ou seja retomando questões colocadas pelo ensino e aprendizagem da matemática em contextos escolares, nomeadamente pelo ensino e aprendizagem da resolução de problemas, as ideias trabalhadas nesta primeira parte do estudo procuraram contribuir para a compreensão, segundo a perspectiva da ciência matemática, de algumas vertentes da actividade matemática.

Esta compreensão torna-se particularmente pertinente quando, por um lado, se observa que diversos investigadores têm salientado que para aprender matemática de maneiras significativas e úteis se torna importante participar na actividade matemática e não adquirir simplesmente procedimentos matemáticos explicitamente descritos; por outro lado, quando se constata que em diversas propostas curriculares actuais a ideia de que "saber matemática é fazer matemática" (5) parece frequentemente acompanhar a ênfase que é colocada na resolução de problemas.

A segunda parte deste estudo incidirá especificamente na problemática da resolução de problemas. Procurar-se-á aí aprofundar a compreensão de algumas das suas vertentes quando perspectivadas no âmbito da educação matemática.

Notas

(1) PAPERT (S.), 1981, "L' Inconscient Mathématique" in Jaillissement de l'Esprit, Ordinateurs et Apprentissage, Flammarion, p.243.
(2) DAVIS (P.), HERSH(R.), 1986, op. cit., p.454.
(3) SANTOS (B.), 1989, Introdução a uma Ciência Pós Moderna, Porto, Edições Afrontamento, pp.11,12.
(4) RESTIVO, citado por BIBBY (N.), ABRAHAM (J.), 1989, "Social History of Mathematical Controversies: Some Implications for the Curriculum" in Mathematics, Education and Society, Document Series No.35, Paris, Unesco, p.56.
(5) Ver, por exemplo, NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 1989, Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Reston, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics, p.7.

Segunda Parte
Resolução de Problemas: Que Rumos para a Educação Matemática?

Segunda Parte - Resolução de Problemas: Que Rumos para a Educação Matemática?

"a aprendizagem da negociação e a aprendizagem da resolução de problemas são duas dimensões importantes que não podem ser esquecidas em qualquer formação de base e em qualquer disciplina" (Bernard, 1990)

Introdução à Segunda Parte

Na sociedade de hoje, caracterizada por mudanças muito frequentes e rápidas, a informação desactualiza-se rapidamente e as informações factuais ensinadas aos alunos na Escola de pouco lhes servirão no futuro enquanto profissionais e cidadãos.

A sociedade actual requer uma Escola que seja um espaço de aprendizagem da comunicação e cooperação, um espaço de desenvolvimento de pessoas com gosto pela aprendizagem permanente, capazes de interpretar e discutir as situações complexas que se lhe apresentam, capazes de formular problemas decorrentes dessas situações e de os resolver de forma flexível, crítica, criativa e eficaz. A capacidade de formular e resolver problemas, individualmente ou em colaboração, aparece, pois, como uma das capacidades essenciais ao homem de hoje e do futuro.

Além disso, também na epistemologia contemporânea diversos filósofos e matemáticos (Popper, Kuhn, Lakatos, Pólya, Davis, Hersh, Tymoczko e muitos outros) têm vindo a indicar a resolução de problemas como uma dimensão insubstituível e indispensável à produção de conhecimento científico, nomeadamente de conhecimento matemático (1).

Contudo, a importância hoje concedida à resolução de problemas, não é apenas justificada por razões relacionadas com necessidades da sociedade no seu conjunto ou com características da matemática enquanto ciência.

A estas podem acrescentar-se outras, mais directamente relacionadas com o ensino e aprendizagem da matemática em contextos escolares, e que se prendem, por um lado, com a constatação, cada vez mais frequente, das elevadas taxas de insucesso em matemática, e por outro, com mudanças progressivas de paradigma sobre a natureza do acto educativo.

De facto, é hoje cada vez mais reconhecido que, nem a redução da educação matemática ao mero ensino de um conjunto de técnicas e processos de cálculo mecânicos, como visavam algumas das orientações inspiradas no movimento 'back to basics', nem a ênfase na dedução, no rigor, nos conceitos abstractos e na linguagem formal, propostos pelo movimento da matemática moderna, produziram os efeitos desejados, quer relativamente à diminuição das taxas de insucesso, quer quanto ao aumento da capacidade matemática dos alunos.

Deste modo, a tónica que se procura pôr na resolução de problemas poderá encarar-se como mais uma tentativa para minorar a crise que continua a afectar o ensino e aprendizagem da matemática em diversos países. Neste âmbito, os problemas aparecem frequentemente como motivação, como uma nova forma de dar vida ao ensino da matemática.

Quanto à natureza do acto educativo, a ênfase na resolução de problemas parece ir ao encontro de perspectivas construtivistas para a aprendizagem da matemática. Apesar das divergências existentes, é mais ou menos consensual, entre os educadores matemáticos, a perspectiva construtivista de que os alunos, em contextos escolares, não absorvem simplesmente a informação matemática tal como lhes é apresentada, mas antes mobilizam os referenciais de conhecimento que já possuem para a incorporarem e construírem conhecimento novo (2). Para a adesão a esta perspectiva, contribuíram de maneira fundamental os trabalhos de Piaget, ao salientarem que o conhecimento da criança não é uma espécie de registo cumulativo e absorção passiva das suas experiências, mas é, antes, uma construção activa por ela elaborada a partir do conhecimento que já possui e das interacções que estabelece com o ambiente que a rodeia (3).

Assim, importa que na Escola os alunos sejam colocados em situações onde tenham oportunidade de reflectir e (re)organizar as suas formas de pensar. Ora, como refere Lerman, é pela escolha cuidadosa de problemas que o professor pode proporcionar ao aluno o contexto favorável para que este possa analisar e questionar o seu próprio conhecimento (4). Na mesma linha, Balacheff e Laborde acentuam que são as "situações-problema para as quais o 'objecto matemático' é um utensílio de resolução fiável, eficaz e económico, que constituirão para os alunos a fonte de sentido dado a esse objecto (saber ou saber fazer)" (5).

Por tudo o que foi dito, e se se admitir a hipótese, seguindo Krygowska (6), de que a educação matemática não é mais do que o desenvolvimento da actividade matemática, e que esta actividade não existe sem problemas, não é de estranhar que, no âmbito do desenvolvimento curricular, diversos Relatórios, diversas Organizações e Associações Profissionais e vários Projectos, refiram que, em educação matemática, o lugar dominante deve ser ocupado pela *resolução de problemas*, servindo esta como fonte e como campo de aplicação de conceitos matemáticos. E também não é de estranhar que, apesar do reconhecimento do papel relevante dos problemas no campo educativo não ser ideia nova, os investigadores em educação matemática, durante os anos 70, tenham dedicado a esta problemática mais atenção do que a qualquer outro tópico do currículo de matemática (7), e ainda hoje, passados mais de vinte anos, a investigação continue intensa.

No entanto, se olhada por um outro prisma, a relevância hoje reconhecida à resolução de problemas em educação matemática pode causar uma certa perplexidade.

É que, nomeadamente no contexto português, não é apenas de agora que currículos, professores e alunos, ou mesmo qualquer cidadão em geral que tenha tido alguma experiência matemática escolar, se referem, explicitamente, à resolução de problemas no âmbito do ensino e aprendizagem desta disciplina.

Quem não se lembra, por exemplo, dos 'célebres' problemas de 'tanques e torneiras' da Escola Primária de outros tempos, ou das aulas de resolução de problemas do 'quase infinito' Palma Fernandes?

E se nos novos programas de matemática do Ensino Básico, propostos pela actual Reforma do Sistema Educativo, se pode ler que a resolução de problemas deve constituir a actividade fundamental desta disciplina (1º ciclo), e que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas é um eixo organizador do ensino da matemática (2º e 3º ciclos), também já nos antigos currículos se encontram referências, frequentes e diversas, respeitantes à resolução de problemas (8).

Por outro lado, se se conversar com professores e alunos sobre as dificuldades de aprendizagem em matemática, quase inevitavelmente se ouve dizer que a 'resolução de problemas' é que é um 'problema'. Assim, poder-se-á colocar a dúvida de se os actuais defensores da importância da resolução de problemas no âmbito da educação matemática, pretenderão transformar num 'problema', para alunos e professores, todo o ensino e aprendizagem da matemática. E mesmo que a razão leve de imediato a rejeitar esta dúvida, com o argumento de que tal pretensão seria, no mínimo, absurda, é provável que fique a interrogação de se alunos, professores, relatórios, associações e currículos, atribuirão o mesmo significado aos 'problemas' e 'resolução de problemas' de que falam.

Tudo o que foi dito serve como pano de fundo à constatação de que, subjacente aos termos *problema* e *resolução de problemas*, há, com certeza, sentidos e compreensões muito diferentes que dependem não só de contextos sociais, temporais e culturais, mas também (e sobretudo?) de quem os utiliza.

É neste quadro de dúvidas e questões, mas também de busca de novas ideias que possibilitem uma melhor compreensão de como criar condições para que, em contextos escolares, os alunos aprendam matemática de uma maneira poderosa e útil, que a atenção se volta para a procura de linhas de análise que proporcionem a elaboração de uma reflexão organizada sobre o(s) significado(s) actual(is) de resolução de problemas no âmbito da educação matemática.

A consulta de publicações variadas, sobre esta temática, parece não deixar dúvidas de que há múltiplas perspectivas segundo as quais a resolução de problemas é abordada. Entre estas encontram-se *objectivo, conteúdo, conjunto de acções, metodologia, via educativa, linha de força* que atravessa todo o curriculo, etc.

Esta diversidade emerge analisando, por exemplo, os seguintes extractos de algumas das publicações consultadas:

- A resolução de problemas é o conjunto de acções desenvolvidas para resolver o problema (9).

- "Se entendermos a palavra conteúdo no seu sentido mais amplo (o que está contido, a substância, o sentido) e não com a conotação que, no ensino, por vezes lhe damos (factos, tópicos, assuntos) - então a resolução de problemas deve ser não só um objectivo geral e uma metodologia privilegiada mas ainda um conteúdo essencial do programa de matemática" (10).

- A resolução de problemas deve assumir-se "como uma linha de força que, 'atravessando' todo o currículo, oriente a definição dos seus objectivos, a proposta de metodologias, a selecção dos conteúdos e processos de avaliação. Isto não significa o abandono das 'regras e das técnicas', mas o deslocar a ênfase para uma via educativa de ensino e aprendizagem da matemática que parece corresponder melhor às necessidades do desenvolvimento da criança e do jovem, à natureza e exigências internas e externas da matemática, às solicitações sociais" (11).

- O problema pode ser modesto, mas se desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver pelos seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta (Pólya, 1945) (12).

A referência, escrita por Pólya em 1945 e extraída do seu livro *How To Solve It*, evidencia que o reconhecimento do papel potencialmente relevante dos problemas no campo educativo não vem de agora. Se problema e resolução de problemas não são expressões novas, apresentarão hoje um novo significado para que se justifique um lugar tão valorizado para esta temática em educação matemática? Afinal, o que é um problema de matemática? E que papel(éis) tem a resolução de problemas desempenhado no currículo escolar de matemática? Que factores interagem com o processo de resolução de problemas? É que, se por um lado é mais ou menos consensual que as pessoas escolarizadas devem estar aptas a utilizar os conhecimentos matemáticos na resolução de problemas, por outro continuam sem se conhecer bem quais as variáveis chave que influenciam o processo de resolução, nem existe unanimidade sobre a forma como a capacidade de resolver problemas deve ser desenvolvida (13).

Se, além disso, a resolução de problemas for encarada como uma via educativa, como uma linha de força que atravessa todo o currículo, quais os vectores dominantes dessa linha? Que papel se pretenderá para o aluno e para o professor? Como serão perspectivadas as actividades de ensino e aprendizagem da matemática?

É sobre algumas destas questões que procurará reflectir-se nesta segunda parte do presente estudo.

O primeiro capítulo incidirá, primeiramente, sobre o objecto da resolução de problemas, ou seja, reflectir-se-á sobre o conceito de problema considerado no âmbito da educação matemática. Em seguida, analisar-se-ão possíveis papéis que a resolução de problemas poderá desempenhar, relativamente ao currículo escolar de matemática. A pertinência desta secção justifica-se na medida em que, embora, como referem Stanic e Kilpatrick (14), os problemas sempre tenham ocupado um lugar no currículo escolar de matemática, a problemática actual da resolução de problemas parece encerrar uma diversidade de vertentes, por vezes conflituais, deixando pouco claros alguns aspectos dessas vertentes.

O segundo capítulo, intitulado *Resolução de problemas em contextos escolares*, iniciar-se-á com uma reflexão sobre práticas pedagógicas que parecem hoje existir, frequentemente, em diversas salas de aula de matemática.

É o questionamento destas práticas que conduzirá a referir um novo movimento de reforma curricular em matemática, que tem vindo a ganhar, progressivamente, cada vez mais terreno, onde a resolução de problemas ocupa um lugar de relevo relativamente à matemática escolar. Será este o contexto para posteriormente se reflectir, numa segunda secção deste capítulo, sobre o significado de *resolução de problemas enquanto via educativa* para o ensino e aprendizagem da matemática.

Notas

(1) Esta problemática foi aprofundada na primeira parte deste estudo. Aí foi referido, em particular, o quasi-empiricismo, que evidencia que a matemática decorre de um diálogo entre pessoas que tentam resolver problemas matemáticos.

(2) As ligações entre construtivismo e resolução de problemas são, por exemplo, ilustradas por Yackel *et al*, que referem que "a característica principal de uma abordagem pedagógica baseada numa visão construtivista da aprendizagem são as actividades propostas que devem dar origem a problemas para os alunos resolverem". Ver YACKEL (E.), COBB (P.), *et al*, 1991, "A Importância da Interacção Social na Construção do Conhecimento Matemático pelas Crianças" in Educação e Matemática, Nº 18, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, p.18.
Quanto às diferentes perspectivas construtivistas em educação matemática, é frequente distinguir-se o construtivismo trivial do construtivismo radical. Ver por exemplo:
• KILPATRICK (J.), 1987, "What Constructivism Might Be in Mathematics Education" in Psychology of Mathematics Education, PME-XI, Vol. I, J. Bergeron, N. Herscovics, C. Kieran (Eds.), Montreal, pp.3-27. Na p.7 o autor apresenta a distinção entre construtivismo trivial e radical.
• PUTNAM (R.), LAMPERT (M.), PETERSON (P.), 1990, "Alternative Perspectives on Knowing Mathematics in Elementary Schools" in Review of Research in Education, 16, C. Cazden (Ed.), Harvard University Graduate School of Education, Washington, American Education Research Association, pp.57-150.
Ernest desenvolve uma abordagem filosófica para a matemática que designa por construtivismo social, na base da qual estão três perspectivas filosóficas: o quasi-empiricismo, o convencionalismo e o construtivismo radical. Ver ERNEST (P.), 1991, The Philosophy of Mathematics Education, Hampshire, The Falmer Press, pp.42-108.

(3) Ver por exemplo:
• PIAGET (J.), 1972, The Principles of Genetic Epistemology, London, Routledge e Kegan Paul.
• PIAGET (J.), GARCIA (R.), 1987, Psicogénese e História das Ciências, Lisboa, Publicações Dom Quixote.

(4) LERMAN (S.), 1983, "Problem-solving or Knowledge-centred: The Influence of Philosophy on Mathematics Teaching" in International Journal of Mathematics Education in Science and Techonology, Vol. 14, No. 1, p.65.

(5) BALACHEFF (N.), LABORDE (J.M.), 1984, "Introduction a l'Édition Française" in LAKATOS (I.), Preuves et Réfutations. Essai sur la Logique de la Découverte Mathématique, Paris, Hermann, p.xviii.

(6) KRYGOWSKA citada por BOUVIER (A.), 1981, La Mystification Mathématique, Paris, Hermann, p.46.

(7) LESTER (F.) 1980, "Research on Mathematical Problem Solving" in Research in Mathematics Education, R.J. Shumway (Ed.), Reston, National Council of Teachers of Mathematics, p.289.

(8) Relativamente aos novos programas de matemática do Ensino Básico, consultar MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO, 1991, Organização Curricular e Programas, Ensino Básico 1º Ciclo Vol. I, 2º Ciclo Vol. I, 3º Ciclo Vol. I, Reforma Educativa, Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário, Lisboa, Imprensa Nacional-Casa da Moeda, E.P.
Nos antigos programas de matemática do 7º e 8º anos, incluídos no Diário da República, I série, nº 252, de 79/10/31, pode ler-se no ponto II, alíneas c) e m), que os objectivos desta disciplina são atingidos pelo aluno que "resolve problemas gráficos" e "revela capacidade de encontrar soluções pessoais para problemas novos".

(9) LESTER (F.), 1980, op. cit., p.287.
Este autor afirma que esta definição é consistente com as apresentadas por muitos outros autores entre os quais inclui Bourne, Brownell, Newell & Simon, Resnick & Glaser.

(10) ABRANTES (P.), 1988, "Mudam-se os Tempos, Mudam-se as Vontades?" in Educação e Matemática, Nº 8, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, p.2.

(11) ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA (Ed.), 1990, Renovação do Currículo de Matemática, 3ª edição, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, p.32.

(12) PÓLYA (G.), referido por MOREIRA (L.), 1987, "A Resolução de Problemas" in Educação e Matemática, Nº 1, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, p.10.
(13) LESTER (F.), 1980, op. cit., pp.288-290.
(14) STANIC (G.), KILPATRICK (J.), 1990, "Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum" in The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving, third printing, R. Charles & E. Silver (Eds.), Reston, Virginia, Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics, p.1.

Capítulo I - Resolução de problemas: Algumas linhas de análise

Nota introdutória

Nas ciências em geral, na filosofia, no ensino, na política, e mesmo na vida quotidiana, é frequente ouvir-se dizer que os problemas desempenham um papel essencial. Quererá isto dizer que nada conta senão os problemas?

Tudo depende do que se entender por *problema*. Aparecem, hoje, uma série de expressões que utilizam esta palavra para designar, indiferentemente, a dificuldade, o obstáculo, a resistência encontrada, a tarefa a cumprir, etc.

Esta variedade de significados, encontrada na linguagem do dia a dia, aparece também no campo educativo. Como acentua Borasi, "uma análise dos problemas utilizados nos estudos de investigação e nas propostas curriculares sugere que a palavra 'problema' não é sempre usada da mesma maneira em diferentes contextos e por diferentes autores, e que o próprio conceito necessita de clarificação" (1).

Assim, e em primeiro lugar, este capítulo incidirá sobre o conceito de problema e a análise de algumas das suas múltiplas faces. Dada a natureza complexa e controversa deste tópico, o objectivo desta análise não é encontrar uma definição precisa e definitiva para este conceito, mas antes iniciar uma discussão que possa ajudar a levantar questões e a encontrar algumas pistas que iluminem o debate actual sobre resolução de problemas em educação matemática.

Em seguida, numa segunda secção deste capítulo, reflectir-se-á sobre possíveis funções dos problemas no ensino da matemática, e indicar-se-ão alguns dos papéis que a resolução de problemas tem desempenhado, ou pode desempenhar, relativamente ao currículo escolar desta disciplina. Neste âmbito serão referidas, nomeadamente, algumas das vertentes do pensamento de Pólya, relativamente ao ensino da matemática em geral e ao ensino da resolução de problemas em particular.

1 - O objecto da resolução de problemas

1.1 - Múltiplas faces do conceito de problema

Daniel Andler, num artigo intitulado *Problème Une Clé Universelle?*, salienta que o conceito de problema, considerado em sentido estrito, é caracterizado por três traços fundamentais. Antes de mais está a subjectividade:

> "O problema deve a sua existência à minha decisão de o criar, ou de o reconhecer como tal" (2).

Para lá da subjectividade, o problema é caracterizado pela temporalidade:

> "O verdadeiro problema encerra em si a promessa ou a esperança de encontrar uma solução. O tempo inscreve-se no intervalo entre a promessa e a sua satisfação, entre a aparição do problema e o seu desaparecimento sob o efeito da solução. Este intervalo permanece indefinido enquanto a solução não for encontrada..." (3).

Enfim, o problema, para Andler, distingue-se pela sua espacialidade na medida em que "não nasce num vazio mas num espaço (...) apenas acontece num determinado contexto. Mudar de contexto - o que pode acontecer quando por exemplo se procura uma solução - equivale a reformular o problema, ou seja, a colocar um problema diferente embora, sem dúvida, aparentado" (4).

Esta dimensão contextual do problema, apesar de a menos evidente dos três traços que caracterizam o conceito de problema, revela-se de uma importância fundamental. É graças ao contexto que o problema, inicialmente subjectivo por essência, adquire uma existência objectiva; que existe enquanto objecto observável independente do sujeito que o faz acontecer.

Inversamente, um problema objectivado dá lugar ao nascimento de tantos problemas subjectivos quantos os sujeitos que se apropriem dele e o reconheçam como tal. A sua existência depende, por outro lado, desta possibilidade de apropriação.

A dualidade que se estabelece entre o problema objectivado e o problema subjectivo ocorre também no plano temporal.

Se o problema subjectivo nasce e morre, o problema objectivado repete-se indefinidamente, uma vez que nada impede de partir dele de novo como se a solução não tivesse ainda aparecido. Neste sentido, pode dizer-se que o problema, subjectivamente abolido pelo encontrar da solução, lhe sobrevive objectivamente e nesta qualidade é atemporal (5).

Para Andler, no plano objectivo, os problemas podem classificar-se de acordo com o lugar que ocupam na disciplina ou subdisciplina à qual se associam ou acabam por associar-se. Encontram-se, assim, problemas fundadores, motores, confirmadores, aplicados, obscuros, insolúveis, desempenhando todos eles um papel fundamental no progresso da ciência (6).

A hierarquia, embora precária, que se pode estabelecer entre os problemas quando se considera esta face objectiva, não aparece no plano subjectivo. Aqui, para os investigadores, todos os problemas são motores.

Com efeito, um problema "não existe se não despertar a curiosidade a alguém" (7). Nesse caso, para o investigador só o problema "pode criar a tensão, o campo, na ausência do qual este ficará imóvel" (8). No entanto, para desempenhar este papel, o problema não deve ser nem demasiado fácil nem demasiado difícil, sob pena de o investigador não conseguir fazer o seu trabalho, sob pena de não "se envolver emocionalmente", como observa Kurt Lewin (9).

Tendo por contexto os desenvolvimentos teóricos de Andler, procura-se em seguida analisar, um pouco mais de perto, o conceito de problema no âmbito do ensino e aprendizagem da matemática na Escola.

Esta análise será conduzida através de duas vias. Uma, mais geral, em que se procurará olhar a face subjectiva do conceito de problema, a partir de algumas das muitas definições deste conceito que abundam na literatura de investigação sobre resolução de problemas. Outra, mais específica, digamos pedagógica, focada em particular no lado objectivo do conceito de problema, considerado no âmbito do ensino e aprendizagem e nas diversas formas que pode assumir um problema de matemática.

1.2 - Análise do conceito de problema a partir de algumas definições

Examinem-se as seguintes quatro definições de *problema:*

• Um indivíduo está perante um problema quando se confronta com uma questão a que não pode dar resposta ou uma situação que não sabe resolver usando o conhecimento imediatamente disponível (Kantowski) (10).

• S tem um problema Q se e só se:
- Q é uma questão;
- S quer ter uma (verdadeira) resposta para Q;
- S não acredita que tenha uma (verdadeira) resposta para Q;
- S não tem uma (verdadeira) resposta para Q.
Ter um problema envolve desejar uma resposta verdadeira e não aleatória (Goldman) (11).

• Um problema é uma situação em que um grupo ou um indivíduo é solicitado a realizar uma tarefa para a qual não possui nenhum algoritmo disponível que determine completamente o método de resolução. A realização desta tarefa tem que ser desejada pelo indivíduo ou grupo. De outro modo a situação não pode ser considerada um problema (Lester) (12).

• É problema tudo o que de uma maneira ou de outra implica da parte do sujeito a construção de uma resposta ou de uma acção que produza um certo efeito (Vergnaud) (13).

Percorrendo estas definições, constata-se que há vectores relativos ao conceito de problema comuns a todas elas. Entre eles, destaca-se o carácter relativo do conceito de problema, e a necessidade do carácter não rotineiro de uma tarefa para que esta possa constituir um problema para alguém.

Para lá destes vectores comuns, há algumas singularidades nas definições apresentadas que é oportuno salientar.

Para Goldman, problemas são necessariamente questões, enquanto que, para Lester, são situações. Por outro lado, Lester chama, explicitamente, a atenção para a importância da resolução do problema ser desejada pela pessoa ou grupo a quem este é apresentado, enquanto que a definição de Kantowski é omissa quanto a esse aspecto. Ou seja, aquele investigador introduz claramente, na resolução de problemas, a importância de uma componente não cognitiva: o desejo. Finalmente, da definição de Vergnaud, é de reter que problema é tudo o que implica da parte do sujeito a construção de uma resposta ou de uma acção.

Considerando o campo escolar, apresenta-se em seguida uma possível caracterização para problema de matemática que procura articular, quer as singularidades relevantes das definições anteriormente apresentadas, quer os vectores comuns encontrados nessas definições. Esta caracterização será usada neste trabalho na análise subsequente.

Problema de matemática: um problema de matemática é um projecto pessoal, uma tarefa, uma situação:

- que o aluno deseja resolver e desenvolver;
- para a qual o aluno não conhece nenhum processo que lhe permita encontrar de imediato a solução;
- que exige da parte do aluno a construção desse processo;
- em cuja actividade de resolução estão envolvidos conceitos, procedimentos ou teorias matemáticas.

Considerar um problema de matemática desta forma tem algumas implicações a nível educativo.

Em primeiro lugar, ressalta a natureza subjectiva do conceito de problema. Ser um problema ou não, não é uma propriedade inerente a uma tarefa de matemática: é, antes, a existência de uma relação particular entre um aluno e uma tarefa que poderá transformar essa tarefa num problema para esse aluno. Deste modo, a mesma tarefa pode ser um problema para um aluno e um mero exercício de rotina para outro. Basta, por exemplo, que este conheça já o caminho que conduz à solução.

Este traço, salientado por Andler, apesar de compreendido e aceite em educação matemática há mais de quarenta anos é, frequentemente, negligenciado em discussões sobre resolução de problemas (14).

Em segundo lugar, sobressai que uma tarefa não é um problema para um aluno a menos que ele se aproprie (15) dessa tarefa e deseje realizá-la. Assim sendo, torna-se necessário que o professor organize ambientes de ensino propícios a que cada aluno se envolva, emocionalmente, com os problemas, e deseje resolvê-los. Introduzir na caracterização de problema de matemática, nomeadamente, a importância do desejo, conduz a destacar que, quando se pretende propor um problema a alguém e analisar os processos de resolução que esse alguém utiliza, importa ter em conta componentes não apenas cognitivas.

Em terceiro lugar, evidencia-se que um problema confronta o aluno com uma descontinuidade entre o ponto em que está e aquele a que quer chegar. Como não dispõe de nenhum procedimento mecânico que lhe permita saber de imediato qual o caminho que o pode conduzir à solução, a resolução do problema exige-lhe a elaboração de um raciocínio novo e criativo.

Um contexto favorável a esta produção, certamente feita de erros, intuições, descobertas, avanços e recuos, requer a integração da ideia de que o erro tem a sua lógica que importa compreender e não excluir. Requer ainda o reconhecimento de que se aprende com os erros, e que por isso as Escolas devem ser lugares para os fazer (16).

Em quarto lugar, salienta-se que algumas propostas de trabalho, que aparecem em diversos manuais escolares em especial no fim de alguns capítulos, e que são, frequentemente, designadas por problemas, ou não são problemas para muitos alunos ou, mesmo sendo-o para alguns, representam uma parte bastante limitada do que poderá ser um problema de matemática. De facto, muitas dessas propostas são resolúveis por aplicação directa de procedimentos ilustrados ao longo desses capítulos, podendo o aluno utilizar um sistema de respostas já constituído. Muitas outras limitam-se a apresentar perguntas explicitamente formuladas e cuja solução, que é precisa, única e deve ser encontrada num curto espaço de tempo igual para todos os alunos, é obtida unicamente através da manipulação dos dados apresentados que são em número necessário e suficiente.

Ficam assim reduzidas, ou mesmo excluídas, oportunidades de formulação de questões pertinentes pelos alunos. Provavelmente, para muitos ficará eliminado o tempo e o desejo necessários para explorarem, investigarem e sentirem como sua, a tarefa que lhes é proposta.

Finalmente, apresentar um problema como uma situação, uma tarefa, um projecto, confere-lhe um carácter muito mais amplo e aberto do que apresentá-lo como uma questão. Um problema, assim caracterizado, não necessita de ser auto-suficiente em termos da informação necessária à sua resolução; não necessita, ainda, de integrar no seu enunciado uma pergunta explicitamente formulada e para a qual todas as pessoas têm que encontrar a mesma resposta. A formulação de questões, bem como a pesquisa e selecção de dados, pode ser deixada, principalmente, a cargo de quem pretende resolver o problema, o que significa que pessoas com interesses, motivações e conhecimentos diferentes, provavelmente, formularão perguntas diferentes e, consequentemente, encontrarão respostas também diferentes.

Quando os dados e os objectivos do problema não estão completamente definidos e caracterizados, cria-se o espaço necessário para que a actividade de formulação de problemas, pelos alunos, seja uma das componentes principais da resolução de problemas, como aliás é proposto pelo N.C.T.M. (17).

Se se atender a estas considerações, provenientes dos vários aspectos considerados num problema de matemática, forçoso é concluir que há inúmeros factores cognitivos e não cognitivos envolvidos na resolução problemas. Forçoso é, ainda, concluir que há uma grande quantidade de informação necessária acerca de cada aluno que o professor deve possuir quando pretende que o foco das actividades de ensino que organiza seja a resolução de problemas.

Considerando a face objectiva do conceito de problema, analisem-se em seguida algumas das formas de que esta face se pode revestir quando os problemas são pensados no âmbito do ensino e aprendizagem da matemática na Escola. Esta análise terá por referência alguns exemplos concretos de problemas e noções relacionadas, apresentados por Borasi, Abrantes e Kilpatrick.

1.3 - Análise do conceito de problema a partir de alguns exemplos

Borasi e Abrantes, em dois artigos intitulados respectivamente *On the Nature of Problems* (18) e *Um (Bom) Problema (Não) é Só...* (19), propõem-se analisar e discutir, a partir de alguns exemplos concretos de problemas e noções relacionadas com este conceito, "uma possível classificação de problemas a serem abordados em matemática escolar" (20), e reflectir sobre "aquilo que é (e não é) um (bom) problema à luz de critérios educativos" (21).

Borasi parte de exemplos de problemas (matemáticos ou não), bem como de exemplos de noções relacionadas (puzzles, exercícios ou situações), mas "cedo constata que é inútil tentar proceder por abstracção, isto é, definir o conceito de problema a partir do conjunto de propriedades comuns a TODOS os exemplos" (22).

No entanto, apesar de não ter encontrado nenhuma propriedade partilhada por todos os exemplos examinados, deparou com semelhanças que lhe permitiram identificar quatro elementos estruturais, a partir dos quais concebeu "um instrumento para avaliação e classificação de problemas de um ponto de vista educativo" (23), cuja aplicação estudou, em particular, no âmbito da educação matemática.

Borasi designou estes quatro elementos por *contexto, formulação, conjunto de soluções* que podem considerar-se aceitáveis para o problema e *métodos de abordagem* que podem ser usados para obter a solução.

Para esta autora, o contexto do problema é a situação na qual o problema está inserido. O seu papel principal parece ser o de fornecer informações que tornarão possível a resolução. Borasi indica que, normalmente, o contexto está contido, pelo menos em parte, no enunciado do próprio problema.

A formulação do problema é a definição explícita da tarefa a realizar. Por um lado, pode já aparecer no enunciado do problema sob a forma de perguntas específicas a serem respondidas ou como a indicação da tarefa a realizar. Por outro lado, a formulação pode ser sobretudo deixada a cargo do resolvedor. Neste caso, Borasi salienta que, provavelmente, pessoas diferentes estabelecerão formulações diferentes, consoante a interpretação que fizerem do problema e o interesse que tiverem nele.

Os problemas podem diferir, consideravelmente, quanto ao número de soluções alternativas que admitem. Enquanto alguns têm uma só solução com contornos nítidos, poderão existir outros com soluções variadas, em que apenas podem ser obtidas soluções aproximadas, ou existir mesmo problemas para os quais não existe solução alguma.

Os métodos, estratégias e actividades que podem ser úteis quando se aborda um problema específico, incluem processos de obtenção da informação necessária, estratégias de formulação ou reformulação do problema ('problem posing strategies') e heurísticas que podem ajudar a obter a solução uma vez que o problema esteja formulado e o contexto identificado.

Com base nestes quatro elementos estruturais, e na possibilidade de existência de diversos atributos e formas para eles, Borasi analisa o que designa por "Exercício", "Problemas de palavras" ('Word-problem'), "Problema-enigma" (Puzzle-problem), "Prova de uma conjectura", "Problema da vida-real", "Situação problemática" e "Situação", evidenciando que estas propostas podem diferir, consideravelmente, quanto ao seu potencial e valor educativo (24).

Abrantes, também a partir de exemplos concretos, reflecte sobre o que designa por "Exercício", "Um problema de 'palavras'", "Um problema para 'equacionar'", "Um problema para 'demonstrar'", "Um problema para 'descobrir'", "Um problema da vida real", "Uma situação problemática" e "Uma situação", evidenciando igualmente que estas diferentes propostas podem estar na base de actividades de aprendizagem muito diversas.

A aplicação do instrumento concebido por Borasi ao conjunto de exemplos concretos apresentados, quer por esta investigadora, quer por Abrantes, pode resumir-se no Quadro I:

Elementos estruturais Legenda	Autor	Contexto	Formulação	Solução	Método de resolução
(a) Exercício	A B	Inexistente	Explícita, única e fechada	A maioria das vezes única e exacta	Utilização de algoritmos previamente conhecidos
(b) Problema de palavras	A B	Totalmente explícito no enunciado	"	"	"
(c) Problema para equacionar	A	"	"	Única e exacta	"
(d) Problema para demonstrar	A	"	Explícita e fechada	"	"
(e) Prova de uma conjectura	B	Só em parte no enunciado; supõe-se o conhecimento de teorias	Única e explícita	Geralmente, mas não necessariamente, única	Exploração do contexto; reformulações; elaboração de novos algoritmos, etc.
(f) Enigma/Problema para descobrir	A B	Totalmente explícito no enunciado	"	A maioria das vezes única e exacta	Acto de insight; reformulações; elaboração de um novo algoritmo, etc.
(g) Problema da vida real	A B	Só em parte no enunciado	Parcialmente dada; muitas alternativas possíveis; implícita e aberta	Várias; só soluções aproximadas	Exploração do contexto; formulação de problemas; criação de um modelo, etc.
(h) Situação problemática	A B	Só em parte no enunciado que é problemático	Implicitamente sugerida; aberta	Várias	Exploração do contexto; reformulações; formulação de problemas
(i) Situação	A B	Só em parte no enunciado não problemático	Inexistente nem mesmo implicitamente	"	Formulação de problemas

A e B - Designações incluídas nas análises feitas, respectivamente, por Abrantes e Borasi.

Quadro I

Analisando o Quadro I, constata-se que as propostas do tipo (a) (b) (f) (g) (h) (i) se revestem de características idênticas para os dois autores.

Para ambos, um *problema* difere de um *exercício*, uma vez que a resolução deste se limita à utilização prática de regras já conhecidas, cuja aplicação directa conduz com certeza à solução. Como exemplo de um exercício, Borasi apresenta "encontrar o resultado de 4x2+6x3". A propósito deste exemplo, a autora chama a atenção para que, nos exercícios, "o contexto parece ser inexistente (...) a menos que se argumente que a estrutura da operação a realizar e as regras aritméticas podem ser consideradas como uma espécie de contexto abstrato" (25).

Frequentemente, a distinção entre "exercícios" e "problemas de 'palavras'" baseia-se na presença explícita, no enunciado destes problemas, de um contexto que não se restringe a números e operações. Só que, como acentua Abrantes, esta distinção pode conduzir a situações enganadoras, uma vez que a excessiva repetição, pelos alunos, deste tipo de 'problemas', os transforma rapidamente "em exercícios disfarçados nos quais o contexto do enunciado acaba por ser irrelevante" (26).

Segundo o mesmo autor, o papel dos "problemas de palavras", muito frequentes no Ensino Primário, "tem um correspondente noutros níveis de escolaridade" (26): o papel desempenhado pelos "problemas para equacionar". Para Abrantes, estes aparecem, frequentemente, como uma 'secção especial' de um dos capítulos de Álgebra do programa (das equações ou sistemas de equações), e a estratégia usada para a sua resolução é, quase invariavelmente, escolher a incógnita, designá-la por x, traduzir o enunciado por uma equação em x e resolver a equação.

A resolução de situações do tipo "enigma" envolve, frequentemente, uma percepção súbita do caminho certo, um acto de 'insight'. Para obter a solução há necessidade de reorganizar a informação dada e, eventualmente, redefinir a formulação original.

Os "problemas da vida real" (situações do tipo (g)) podem constituir ocasiões propícias a actividades de modelação matemática, ao reconhecimento da possibilidade de existência de soluções parciais para problemas matemáticos e à necessidade de desenvolvimento de critérios de avaliação para estas soluções.

As actividades de modelação matemática podem ajudar os alunos a analisar, criticamente, a afirmação de que os modelos matemáticos fornecem sempre soluções objectivas, no sentido de moralmente neutras e independentes de juízos humanos, para problemas do dia a dia.

Tanto Abrantes como Borasi chamam a atenção para que as "situações problemáticas" (h), podem emergir da própria matemática, e salientam que, no processo de resolução destas situações, uma das vertentes fundamentais é a actividade de formulação de problemas, que se encontra, intrinsecamente, envolvida nesse processo.

Quanto às "situações", Borasi ilustra-as com um exemplo constituído pela apresentação de um conjunto de ternos pitagóricos. Refere que estas situações, embora não constituindo em si próprias problemas, podem ser um estímulo valioso para actividades de formulação de problemas. De facto, uma pessoa, quando confrontada com os ternos pitagóricos, pode procurar relações entre eles, tentar descobrir outros ternos, e encontrar regularidades inesperadas. O reconhecimento destas regularidades pode despertar a curiosidade acerca do porquê da sua existência, pode conduzir à formulação de conjecturas acerca das propriedades dos ternos pitagóricos em geral, ou a fórmulas que permitam gerá-los.

Assim, a apresentação do conjunto de ternos pitagóricos, ao perturbar o estado de equilíbrio porque não se ajusta a um padrão esperado, pode efectivamente constituir e/ou originar os mais variados problemas.

Continuando a ter como referência o Quadro I, Borasi introduz o que designa por "prova de uma conjectura". A autora indica que, aqui, a actividade de resolução de problemas não deve ser entendida como a actividade de reprodução de demonstrações memorizadas, mas antes como a actividade de produção de demonstrações.

Actualmente, quanto ao ensino da matemática, Abrantes salienta que "raramente se propõem aos alunos questões em aberto, conjecturas das quais não se sabe à partida se são verdadeiras ou não" (27). Aqui, segundo o mesmo autor, as actividades de demonstração reduzem-se aos "problemas para demonstrar" e, frequentemente, a desvalorização ou mesmo rejeição de caminhos inesperados para responder a estas questões, bem como a sua repetição e pouca variedade, vão-nas transformando em exercícios do tipo 'mostre que'.

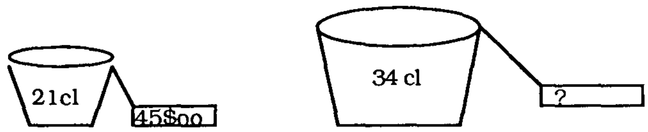
Borasi, embora reconhecendo que o estudo que faz tenta, essencialmente, examinar problemas de um ponto de vista estrutural, fora, portanto, do domínio específico do ensino, não deixa de chamar, explicitamente, a atenção, para a importância de se ter em conta o sujeito que pretende resolver o problema. Refere concretamente que, dado um problema específico, é este sujeito que cria diferentes formulações. A informação a extrair do contexto, se não mesmo, nalguns casos, o próprio contexto, depende fortemente do conhecimento do sujeito, de experiências passadas e interesses, e, em certa medida, é ele quem escolhe os métodos de resolução e as soluções que vai considerar aceitáveis ou justificativas (28).

Mesmo tendo presente que o Quadro I apenas apresenta algumas das possíveis combinações de diferentes atributos dos quatro elementos estruturais considerados relativamente ao conceito de problema, este Quadro é suficientemente ilustrativo da variedade de formas de que pode revestir-se um problema de matemática, bem como da diversidade de actividades em que pode envolver-se quem pretende resolver um problema.

Esta diversidade pode ser igualmente ilustrada a partir de algumas situações propostas por Kilpatrick, cuja resolução envolve potencialmente a utilização do conceito matemático de *proporção*. Em 1985, Kilpatrick (29), num balanço retrospectivo dos últimos vinte e cinco anos de investigação sobre resolução de problemas no âmbito do ensino da matemática, e tentando abarcar tanto problemas matemáticos escolares como não escolares, parte do conceito matemático de proporção e imagina as situações seguintes:

(i) $21/45 = 34/x$. Qual é o valor de x?

(ii)



(iii) Se um copo de 21 cl de coca-cola custa 45$00 qual será o custo de um copo de 34 cl?

(iv) Foi dado a um grupo de três alunos do 2º ano do ciclo preparatório o problema de planearem um pic-nic. Foi-lhes dito que cada copo de coca-cola de 21 cl custava 45$00 e eles estão a tentar encontrar quanto deverá custar um copo de 34 cl.

(v) A colectividade local da sua zona está a fazer um pic-nic e espera ganhar algum dinheiro vendendo copos de coca-cola. Um dos membros estabeleceu para o copo de 21 cl o preço de 45$00 e pediu-lhe a si para dizer que preço seria justo para cada copo de 34 cl.

(vi) Se um copo de coca-cola de 21 cl custar 45$00 o custo proporcional de um copo de 34 cl não é um número inteiro. Qual é o mais pequeno número inteiro que se deve adicionar ao custo de um copo de coca-cola de 21 cl para tornar o custo proporcional de um copo de 34 cl um número inteiro?

Resumidamente, poder-se-á dizer que:

• (i) é o "esqueleto do cálculo" (30) das outras situações.

• (ii) e (iii) são os chamados problemas de tradução, problemas de equacionar, ou problemas de palavras ('word problems'), que abundam em inúmeros livros de texto do 7º ano do Curso Unificado. Habitualmente, estes problemas servem para os alunos terem oportunidade de aplicar o que anteriormente aprenderam, neste caso sobre proporções; (iii) apresenta-se na sua roupagem mais tradicional, enquanto que (ii) pode ser uma forma proveitosa de apresentar o problema a alunos com dificuldades de leitura.

• (iv) é, frequentemente, designado por problema da vida real. Segundo Kilpatrick, estes problemas simulam situações reais que os alunos podem vir a enfrentar, e tanto podem ser-lhes dados como podem ser os próprios alunos a formulá-los. O que importa é que a situação seja realista e tenha significado para os alunos. Estes devem encontrar uma solução que tenha em conta tanto o contexto do problema como qualquer conceito ou procedimento matemático que possa ser apropriado à resolução.

• (v) para Kilpatrick, exemplifica uma classe de problemas envolvendo, potencialmente, alguma matemática, e que os alunos podem encontrar em contextos não escolares.

• (vi) representa uma classe de problemas matemáticos não rotineiros e de grande complexidade e, para Kilpatrick, com maior interesse matemático do que os vulgares 'problemas de palavras'.

Analisem-se estas situações à luz do instrumento proposto por Borasi, supondo-se que são apresentadas a alunos no final do 7º ano Unificado que as desejam resolver:

	Contexto	**Formulação**	**Soluções**	**Métodos de abordagem**
(i)	Inexistente	Unica e explícita	Unica e exacta	Utilização de algoritmos conhecidos
(ii) e (iii)	Completamente explícito no enunciado	"	"	"
(iv) e (v)	Só parcialmente no enunciado	Sugerida pelo enunciado; várias alternativas possíveis	Várias resoluções possíveis	• Exploração do contexto; reformulação do problema; • selecção e aplicação de algoritmo(s); • formulação de problemas, etc.
(vi)	Só parcialmente no enunciado	Unica e explícita	Não necessariamente única	• Exploração do contexto; • formulação de problemas, etc.

Quadro II

A situação (i) aparece, frequentemente, nos manuais escolares, e destina-se a ser resolvida por alunos que dispõem já do algoritmo ou procedimento que conduz à solução. Nesse sentido, e de acordo com a definição de problema de matemática anteriormente considerada, e com a terminologia proposta por Abrantes e Borasi, para a generalidade dos alunos, esta situação não é um problema mas sim um exercício.

Como refere Abrantes, "o valor educativo dos exercícios não será nulo, mas é claramente limitado à prática de utilização de uma ou várias regras previamente conhecidas. Resolver muitos exercícios não contribui para desenvolver capacidades de raciocínio ou estratégias de resolução de problemas " (31).

O que distingue (ii) de (i) é a presença explícita do contexto no enunciado do problema. Como anteriormente foi referido, esta diferença tem sido utilizada, frequentemente, para distinguir um *problema* de um *exercício*.

No entanto, um aluno de 7º ano do Curso Unificado que já resolveu e compreendeu, por exemplo, variadíssimos 'problemas' (como normalmente se designam) sobre patas e cabeças de galinhas e coelhos, provavelmente já conhece e aplica, mecanicamente, o processo de resolução aprendido, quando lhe aparece um 'problema' sobre patas e cabeças de avestruzes e ovelhas ou gansos e vacas (32). Estas situações têm tido um papel privilegiado nas aulas de matemática. No entanto, limitar a resolução de problemas à resolução de questões deste tipo, é limitar a experiência matemática dos alunos à resolução de questões com soluções bem determinadas que podem obter-se através da aplicação de um algoritmo já conhecido.

Em (iv) e (v), o enunciado da situação não inclui, explicitamente, nenhuma pergunta. Provavelmente, quem desejar resolver o problema, ao constatar que o custo proporcional de um copo de 34 cl de coca-cola não é um número inteiro, terá que explorar o contexto do problema procurando, por exemplo, saber se será indiferente arredondar o valor obtido por defeito ou por excesso.

E para isso, provavelmente, terá que investigar, por exemplo, se a Escola contribuirá com algum subsídio para a realização do pic-nic, e em caso afirmativo qual o montante desse subsídio e como é que ele afecta o custo de um copo de coca-cola de 34 cl. Ou se o significado de um preço justo, para a colectividade local, representa o preço a pagar que tornará possível obter o lucro suficiente para proporcionar um determinado benefício aos sócios, e assim por diante.

As estratégias de resolução de (iv) e (v) poderão envolver, portanto, actividades de recolha de dados, de reformulação do problema, de levantamento de questões, colocação de novos problemas, etc. E o mesmo se passa com a situacão (vi).

Perante o conjunto de situações de (i) a (vi), professores diferentes poderão assumir perspectivas diferentes quanto aos problemas a resolver em contextos escolares.

Alguns poderão considerar que é prioritário que os alunos resolvam situações do tipo (i), argumentando que, se os alunos conhecerem processos de cálculo, mais tarde saberão quando e como aplicá-los. Outros, poderão dizer que em (iv) e (v), uma vez que não está explicitamente formulada nenhuma questão, os alunos não saberão o que fazer, e por isso não é de lhes propor tais situações. Ou que, se se ensinarem os alunos a resolver (i) e (ii) ou (iii), a resolução de (iv), (v) e (vi) estará assegurada quando for necessário. Ou que a matemática escolar não deve preocupar-se com a situação (v), uma vez que esta situação envolve demasiados factores não matemáticos. Ou que o que é essencial é que os alunos resolvam situações do tipo (vi), pois são as que melhor traduzem a essência da actividade matemática. E muitas outras perspectivas diferentes destas se poderiam imaginar.

Assim, quando actualmente se propõe que a resolução de problemas seja o foco do ensino e aprendizagem da matemática, importa compreender o que esta orientação significará para diferentes professores. Como pensarão dar-lhe corpo? Que problemas escolherão? Que funções pretenderão para os problemas no ensino e aprendizagem da matemática? Que papéis reservarão à resolução de problemas?

A próxima secção deste capítulo incidirá sobre algumas das possíveis funções e papéis da resolução de problemas perspectivada no âmbito da educação matemática.

2 - Resolução de problemas e currículo de matemática

Os problemas, no currículo de matemática, têm uma história que remonta a uma época tão longínqua como a dos antigos egípcios, chineses e gregos. Exemplo disso é o Papiro de Ahmes, um manuscrito egípcio datado de 1650 A.C., copiado a partir de um documento ainda mais antigo, pelo escriba Ahmes, e que apresenta não só um conjunto de problemas mas também alguns métodos particulares de resolução (33).

No entanto, ao longo dos tempos, a resolução de problemas não foi sempre perspectivada do mesmo modo. Até muito recentemente, a sua aprendizagem era encarada de uma forma limitada, supondo-se que, para ensinar a resolver problemas, bastava apresentar simplesmente problemas e, eventualmente, fornecer e/ou ilustrar regras práticas de resolução de um ou outro problema em particular.

Esta tendência não é com certeza alheia ao facto de, até este século, ser opinião mais ou menos generalizada que o estudo de qualquer conteúdo matemático, pela sua própria natureza, contribuía para o desenvolvimento da capacidade de raciocinar, pensar e resolver problemas relativos à vida do dia a dia. Assim, os problemas eram considerados como um dos elementos do currículo de matemática que, tal como todos os outros, contribuíam para o desenvolvimento do poder de raciocínio (34).

Foi precisamente o questionamento desta perspectiva, ocorrido perto do início do século XX, que a par de outros factores contribuiu para que, muitos educadores matemáticos, começassem a dedicar uma atenção especial ao estudo e compreensão da multiplicidade de variáveis que interagem, de uma forma complexa, no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas.

Presentemente, há consenso entre os educadores matemáticos de que possibilitar que os alunos melhorem o seu desempenho em resolução de problemas requer bem mais do que dar-lhes apenas bastantes problemas para resolver. Neste âmbito podem distinguir-se diversas funções e papéis para a resolução de problemas relativamente ao ensino e aprendizagem da matemática na Escola.

2.1 - Funções dos problemas no ensino da matemática

Borralho distingue três funções para os problemas no ensino da matemática, salientando que elas não se exercem independentemente umas das outras e que um problema, na maior parte dos casos, pode visar e cumprir diferentes funções. Estas funções são designadas, pelo autor, por *função de ensino*, *função educativa* e *função de desenvolvimento* (35).

Na função de ensino, "a proposta de um problema a um aluno é a oportunidade para que este se confronte com uma situação matemática, na qual se incluem determinados conhecimentos sob a forma de termos ou expressões matemáticas, relações quantitativas, operações matemáticas, etc., que são necessários aplicar ou realizar para obter as respostas. É precisamente através deste complexo mecanismo que os problemas cumprem a sua função de ensino" (36).

A função educativa dos problemas visa a formação da personalidade do aluno e engloba o promover um posicionamento activo e crítico face aos fenómenos e factos naturais e sociais, a sensibilização para a importância da matemática no seu desenvolvimento pessoal e o fomentar atitudes positivas face ao trabalho em geral e à resolução de problemas em particular.

A função de desenvolvimento relaciona-se, especificamente, com a influência da resolução de problemas no "desenvolvimento intelectual do aluno e, essencialmente, na formação do seu pensamento" (37). Borralho refere que a formação do pensamento adquire um relevo especial quando, tal como é hoje, importa desenvolver nos alunos capacidades de auto aprendizagem.

Se consideradas globalmente e articuladas de uma forma consistente, quer entre si, quer relativamente ao currículo escolar de matemática, estas três funções parecem poder proporcionar a constituição de sistemas de ensino e aprendizagem propícios à formação multifacetada e global dos alunos.

As funções dos problemas prendem-se com os objectivos visados para o ensino e aprendizagem da matemática, e ainda com a forma como o professor interpreta, organiza e orienta a actividade de resolução de problemas na sala de aula. Deste modo, a compreensão da problemática da resolução de problemas no âmbito da educação matemática poderá ser alargada pela análise dos possíveis papéis que a resolução de problemas poderá desempenhar relativamente ao currículo. Entre os autores que desenvolveram essa análise encontram-se Ernest, Stanic e Kilpatrick.

2.2 - Possíveis papéis para a resolução de problemas

Ernest, ao salientar possíveis interpretações de "problemas e investigações" e do seu papel no ensino da matemática, distingue três conjuntos de perspectivas (38):

• Rejeição da resolução de problemas: esta perspectiva é baseada na ideia de que a matemática escolar é orientada pelo conteúdo matemático, e que a sua função central é incutir competências matemáticas básicas. Os problemas são considerados sem valor, um desperdício de tempo que deveria ser utilizado em 'trabalho importante'.

• Incorporação dos problemas como conteúdo: esta perspectiva considera os problemas como um conteúdo adicional a ser 'somado' a um currículo guiado pelo conteúdo matemático. Os problemas são considerados objectos de pesquisa utilizados para enriquecer o ensino, e não numa perspectiva de processo de aprendizagem ou como uma abordagem pedagógica a adoptar no ensino e aprendizagem da matemática. Particularmente, é ignorada a dimensão da formulação de problemas.

• Resolução de problemas como pedagogia: aqui, a resolução de problemas é considerada não como um acréscimo ao currículo de matemática, mas, simultaneamente, em termos de processo de aprendizagem e de abordagem pedagógica a adoptar na sala de aula para todo o currículo.

Esta pedagogia interessa-se pelo papel do ser humano na produção de conhecimento, considerando indispensável incorporar totalmente, no currículo, todas as dimensões do processo de resolução de problemas, entre as quais a formulação de problemas que é olhada como uma vertente fundamental; reconhece que o trabalho de grupo e a discussão facilitam a investigação de situações problemáticas, e reserva ao professor o papel quer de gerir os recursos e ambientes educativos em que os alunos aprendem, quer de encorajar os alunos a explorarem situações matemáticas e a formularem e prosseguirem com as suas próprias investigações.

Na resolução de problemas como pedagogia, Ernest distingue duas vertentes. Uma em que a ênfase é posta nos alunos e nos seus interessses e não no contexto social em que vivem e estudam. Para este autor, aqui "é provável que a gama de temas a investigar se restrinja a situações puramente matemáticas, ou tópicos temáticos respeitantes a questões 'seguras' como contraponto a questões políticas" (39). Outra, em que se procura encorajar o pensamento crítico do aluno através do questionamento do conteúdo do curso, pedagogia e avaliação. Aqui, muitas das situações para investigação são baseadas em materiais autênticos como sejam, por exemplo, jornais, estatísticas oficiais e problemas sociais.

Também Stanic e Kilpatrick (40) destacam a existência de diferentes perspectivas sobre o papel que a resolução de problemas tem desempenhado relativamente ao currículo escolar de matemática. Estas perspectivas, que os autores fazem emergir a partir de uma abordagem histórica que analisa a resolução de problemas no currículo desde os antigos egípcios até ao presente, são agrupadas em três temas gerais: <u>resolução de problemas como contexto</u>, <u>resolução de problemas como competência</u> e <u>resolução de problemas como arte</u>.

• <u>Resolução de problemas como contexto:</u> Neste tema, os problemas e a sua resolução são considerados meios para atingir outras finalidades consideradas importantes. Aqui os autores incluem os cinco subtemas que a seguir se indicam.

- *Resolução de problemas como justificação*: os problemas são incluídos no currículo em parte para justificar o ensino da matemática. Para os autores, provavelmente, e pelo menos alguns problemas relacionados com experiências do mundo real, foram incluídos no currículo para mostrar a professores e alunos o valor da matemática.
- *Resolução de problemas como motivação*: fundamentalmente, o objectivo é interessar os alunos pelo ensino de determinados conteúdos matemáticos. Exemplo disso é a apresentação de um problema envolvendo a adição, com o objectivo de introduzir um conjunto de aulas destinadas à aprendizagem do algoritmo mais eficiente para adicionar números.

- *Resolução de problemas como recreação*: este subtema está relacionado com o da motivação, na medida em que também se procura interessar os alunos. No entanto, aqui os problemas são apresentados não tanto para os motivar a aprenderem algo, mas procurando-se, antes de mais, que os alunos se divirtam com a matemática que já aprenderam.

- *Resolução de problemas como veículo*: os problemas não servem apenas para motivar os alunos a interessarem-se pelo ensino directo de um determinado assunto, mas constituem um veículo através do qual pode ser aprendido um novo conceito ou competência. Por exemplo, um currículo constituído, exclusivamente, por problemas, reflecte a presença deste subtema.

- *Resolução de problemas como prática*: fundamentalmente, os problemas constituem a prática necessária para reforçar conceitos e competências ensinadas directamente. Segundo Stanic e Kilpatrick, destes cinco subtemas este foi o que teve maior influência no currículo de matemática.

• <u>Resolução de problemas como competência:</u> Neste tema, a resolução de problemas é considerada como uma das diversas competências a ser ensinada na Escola.

Colocar a resolução de problemas numa hierarquia de competências a ser adquirida pelos alunos, pode acarretar consigo diversas consequências relativamente ao papel da resolução de problemas no currículo de matemática. Stanic e Kilpatrick indicam que, na competência geral de resolução de problemas, estabelecem-se distinções hierárquicas entre problemas rotineiros e não rotineiros. De acordo com esta ideia, a aprendizagem da resolução de problemas não rotineiros segue-se à aprendizagem da resolução de problemas rotineiros, que por sua vez só acontece após os alunos terem aprendido outras competências e conceitos básicos. Assim, a resolução de problemas não rotineiros torna-se, como referem aqueles autores, "numa actividade apenas para os alunos especialmente capazes, mais do que para todos os alunos" (41).

• <u>Resolução de problemas como arte:</u> Relativamente a este tema, Stanic e Kilpatrick salientam que é uma perspectiva mais profunda e compreensiva do papel da resolução de problemas no currículo escolar de matemática, que emerge dos trabalhos de George Pólya. Estes trabalhos constituem uma referência fundamental na investigação sobre a problemática da resolução de problemas, ao acentuarem, nomeadamente, que resolver problemas não é uma actividade anárquica e que é possível, em contextos escolares, ajudar os alunos a desenvolver esta capacidade.

Observe-se um pouco mais de perto como concebe Pólya a educação e o ensino da matemática, em particular no que respeita à resolução de problemas.

2.3 - Pólya e a resolução de problemas em matemática

Para Pólya, o principal objectivo da educação é ensinar os mais novos a pensar, e a resolução de problemas constitui uma arte prática que todos os alunos podem aprender. A matemática consiste em informação e 'know-how', e "saber matemática é ser capaz de fazer matemática" (42). À pergunta o que é o 'know-how' em matemática, Pólya responde que "é a capacidade de resolver problemas" (42).

Pólya acentua que a matemática já feita, que é apresentada numa forma acabada e dedutiva em publicações e livros de texto, representa apenas uma das faces desta ciência: a face que requer raciocínio demonstrativo. Aí, encontra-se ausente o raciocínio plausível que Pólya concebe como sendo provisório, controverso e aquele que sustenta as conjecturas matemáticas (43); é este raciocínio que está intrinsecamente presente na matemática enquanto ciência a fazer.

De acordo com Pólya, o ensino da matemática não deve omitir nem negligenciar nenhuma das faces da prática matemática real. Considera que, tal como é possível aprender a demonstrar, também é possível aprender a 'adivinhar' ('guessing'), e que "se a aprendizagem da matemática reflecte, de algum modo, a invenção da matemática, deve aí haver lugar para 'adivinhar', para a inferência plausível" (44).

Assim, propõe-se estudar os elementos do raciocínio plausível, "os esforços heurísticos para compreender o processo de resolver problemas, especialmente as operações mentais tipicamente usadas nesse processo" (45).

Concebe um modelo de resolução de problemas constituído por quatro etapas (compreensão do problema, concepção de um plano, execução do plano e avaliação do que foi feito), e chama a atenção para a importância de uma série de questões, frequentemente designadas por heurísticas, que quem pretende resolver o problema deve colocar a si próprio em cada uma destas etapas de modo a organizar o seu pensamento de uma forma mais sistemática e eficaz (46).

Pólya supõe que nem o estudo da matemática pela sua própria natureza aumenta o nível de inteligência, nem o simples facto de resolver problemas sem orientação conduz, linearmente, a melhorar o desempenho. Em lugar disso, reconhece que o professor deve ilustrar técnicas de resolução de problemas, discuti-las com os alunos e proporcionar o ambiente apropriado para que possam ser praticadas de uma maneira não mecânica. Observa ainda que, embora 'problemas' rotineiros possam ser necessários a determinados objectivos pedagógicos, é apenas através da resolução criteriosa de problemas não rotineiros que os alunos podem desenvolver a sua capacidade de resolver problemas.

Para Pólya, o ensino é também uma arte, devendo o professor centrar a sua atenção em problemas realmente significativos e tratá-los vagarosamente, mais do que percorrer com pressa todos os detalhes de um programa demasiado extenso. Sendo o ensino uma arte, e a resolução de problemas também uma arte prática, ninguém pode programar ou mecanizar o ensino da resolução de problemas; este ensino é "uma actividade humana que requer experiência, gosto e bom senso" (47).

Em síntese, dos três temas apresentados relativamente ao papel da resolução de problemas no currículo de matemática, Stanic e Kilpatrick referem que a resolução de problemas, como arte, é o tema mais defensável e prometedor. No entanto, é também aquele que levanta mais dificuldades quando se pretende levá-lo à prática em salas de aula reais ou operacionalizá-lo em livros de texto. Por vezes, paradoxalmente, alguns dos estudos relativos ao ensino da resolução de problemas que, aparentemente, parecem seguir a filosofia concebida por Pólya, revelam após análise mais detalhada, modelos de ensino excessivamente prescritivos em que as heurísticas de Pólya foram consideradas numa perspectiva quase algorítmica.

Assim, para os investigadores em educação matemática que perspectivam a resolução de problemas como uma arte, que envolve capacidades cognitivas de aquisição e produção de conhecimento e não se esgota na racionalidade científica, um grande desafio que hoje se coloca é o de como 'capturar', em modelos de ensino, materiais, e livros de texto, as linhas orientadoras essenciais dessa arte, de modo a que professores e alunos possam ser ajudados a desenvolver as suas potenciais capacidades artísticas.

Stanic e Kilpatrick salientam que, actualmente, conflitos entre ideias básicas acerca da inteligência humana, da educação e do currículo escolar continuam a permear discussões sobre resolução de problemas (48).

Assim, uma questão a colocar é, porque se considera, hoje, importante, que os alunos resolvam problemas na Escola. A análise desta questão poderá ajudar a decidir que papel(éis) e função(ões) deverá hoje desempenhar a resolução de problemas no âmbito da educação matemática a proporcionar aos alunos.

Nota conclusiva

Se bem que os problemas tenham feito parte integrante do currículo escolar de matemática desde há muito, assiste-se hoje a um esforço no sentido do alargamento de perspectivas sobre o que poderá significar um problema de matemática. Este esforço é acompanhado por um lançamento de propostas de (re)valorização do papel da resolução de problemas no currículo, bem como por um interesse alargado pela investigação educativa sobre esta temática. Estas perspectivas não são, no entanto, coincidentes. De facto, diversos investigadores salientam que os termos *problema* e *resolução de problemas* não são compreendidos do mesmo modo por diversos autores.

Tendo em conta a análise sobre o conceito de problema, desenvolvida ao longo deste capítulo, há dois aspectos que importa salientar.

Em primeiro lugar, evidencia-se que o conceito de problema é um conceito ambivalente cuja natureza oscila, nomeadamente, entre a objectividade e a subjectividade.

Quer se considere a face objectiva quer a face subjectiva do conceito de problema, parece não haver dúvidas de que este constitui um elemento de desenvolvimento que faz progredir quer a ciência enquanto corpo de conhecimentos quer o investigador que pretende resolver o problema, seja cientista, aluno, professor ou qualquer outro.

Não há, contudo, palavras distintas, uma para designar o problema objectivo, o problema-enunciado, a conjectura, o conjunto de hipóteses e factos de observação, e outra para referir o problema-subjectivo, o problema-questão, o modelo matemático que pretendo inventar, a conjectura que desejo explorar, a explicação coerente que devo descobrir.

Ora não se encontrarão também, nesta amálgama terminológica, alguns dos elementos explicadores da uniformidade com que a palavra problema é utilizada para designar situações tão variadas como, por exemplo, 'eu tenho um problema com a matemática na Escola' e 'o problema matemático das quatro cores' (49)?

Se se pretende que a resolução de problemas constitua um eixo organizador do ensino da matemática, parece pertinente que os alunos contactem, não apenas com tantos problemas quanto possível, mas, mais importante que isso, com uma grande diversidade de problemas de matemática.

Estar desperto para as múltiplas faces do conceito de problema, bem como para as questões levantadas pela unicidade de expressões para as designar, pode ajudar a compreender e distinguir a diversidade de significados e de formas de que pode revestir-se um 'problema' no âmbito da educação matemática. Pode conduzir à necessidade de encontrar uma terminologia útil e adequada a essa diversidade que ajude os professores a incluir, na organização das actividades de ensino, diferentes tipos de problemas.

Em segundo lugar, a análise apresentada ao longo deste capítulo permite salientar que, entre as perspectivas segundo as quais os problemas podem ser considerados, encontram-se, nomeadamente, uma perspectiva psicológica, uma perspectiva disciplinar, uma perspectiva social-antropológica e uma perspectiva pedagógica (50).

Na perspectiva psicológica, o problema é interpretado como a actividade de um sujeito que o deseja resolver. Na disciplinar, considera-se que a matemática é criada no processo de formulação e resolução de problemas. O ponto de vista social-antropológico vê o problema como sendo dado e recebido numa transacção. O problema constitui uma tarefa a realizar, por exemplo, na sala de aula, entendida esta como uma situação social conjuntamente construída pelo professor e alunos. A perspectiva pedagógica remete para a questão do que poderão significar os problemas para o ensino da matemática, e, em particular, para a questão de porque se considera importante que os alunos resolvam problemas na Escola.

Se se adoptar a tese construtivista de que toda a aprendizagem consiste, essencialmente, em resolver problemas, o estudo da resolução de problemas relativamente ao currículo escolar de matemática não pode, simplesmente, focar-se em aspectos isolados deste currículo. A resolução de problemas estará envolvida no processo pelo qual os alunos tentam encontrar sentido no ensino à luz dos constructos já existentes, no processo pelo qual tentam estruturar o conhecimento que adquirem e relacioná-lo com o que já possuem, no processo pelo qual desenvolvem e aplicam competências e capacidades.

A resolução de problemas surge, assim, no âmbito da educação matemática, como uma actividade a desenvolver pelos alunos não apenas em ocasiões pontuais, nem à margem ou em paralelo ao currículo, mas como parte integrante do ensino. Assim sendo, a compreensão da problemática da resolução de problemas poderá ser aprofundada analisando o significado de resolução de problemas, enquanto via educativa, para o ensino e aprendizagem da matemática na Escola. É sobre esta temática que incidirá o próximo capítulo desta segunda parte do estudo.

Notas

(1) BORASI (R.), 1986, "On the Nature of Problems", in Educational Studies in Mathematics, Vol. 17 (2), p.125.
(2) ANDLER (D.), 1987, "Problème - Une Clé Universelle?" in D'Une Science à l'Autre - Des Concepts Nomades, Sous la Direction d'Isabelle Stengers, Paris, Éditions du Seuil, pp.121-125. Andler considera que, quando se pretende caracterizar o conceito de problema em sentido estrito, ou seja, a utilização do termo sobre a qual não há dúvidas, há três traços que sobressaem: a subjectividade, a temporalidade e a espacialidade (spacialité). Ver pp.121-125. A citação encontra-se na p.122.
(3) Ibid, p.122.
(4) Ibid, p.123.
(5) Ibid, p.124. Andler, nesta página, escreve:
"Et c'est parce que le problème peut être saisi, formulé, indépendamment du fait qu'il s'est posé à moi, qu'il survit à sa solution: c'est en tant qu'il est aussi objectif, ou intersubjectif, qu'il est aussi répétable ou atemporel".
Em nota de rodapé o autor chama a atenção para que "en autre sens, on est tenté de dire précisément l'inverse: le problème peut être objectivement 'réglé' - par exemple, une conjecture mathématique résolue par une preuve de sa justesse - tout en subsistant subjectivement - par exemple, parce que la démonstration est trop complexe pour m'être pleinement intelligible".
(6) Ibid, pp.127-131.
(7) POLANYI, referido por ANDLER (D.), ibid, p.130.
(8) ANDLER (D.), 1987, op. cit., p.130.
(9) Citado por ANDLER (D.), que refere Polanyi, ibid.
(10) KANTOWSKI (M.G.), 1977, "Processes Involved in Mathematical Problem Solving" in Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 8, No. 3, National Council of Teachers of Mathematics, p.163.
(11) GOLDMAN (A.), 1986, "Problem Solving, Power and Speed" in Epistemology and Cognition, Cambridge, Massachusets and London, Harvard University Press, p.126.
(12) LESTER (F.Jr.),1980, "Research on Mathematical Problem Solving" in Research in Mathematics Education, R.J. Shumway (Ed.), Reston, National Council of Teachers of Mathematics, p.287.
(13) Vergnaud, citado por BOUVIER (A.), 1981, La Mystification Mathématique, Paris, Hermann, p.15.
(14) KILPATRICK (J.), 1985, "A Retrospective Account of The Past 25 Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving" in Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives, Silver (Ed.), Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, p.2.
(15) Meirieu define *apropriação* como sendo o que permite fazer, verdadeiramente sua, uma aprendizagem, tornando um sujeito capaz de a explicar a outro e de responder às suas eventuais questões ou objecções. Ver MEIRIEU (P.), 1990, Apprendre...Oui, Mais Comment, 5.ª édition, Paris, ESF éditeur, p.152.
(16) HENRY PERKINSON num texto intitulado "Educative Environments", Et Cetera - Summer 80, p.142, escreve que as Escolas devem ser ambientes educativos. Considera que ambientes educativos são lugares para fazer erros, porque aprendemos com os nossos erros.
(17) N.C.T.M. é a abreviatura utilizada para referir o National Council of Teachers of Mathematics. Sobre a inclusão da actividade de formulação de problemas na actividade de resolução de problemas ver, por exemplo, NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 1989, Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Reston, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics, p.254.
Por vezes, as tarefas matemáticas em que os dados e objectivos não estão completamente definidos e explícitos são designadas pela expressão *investigações matemáticas*.
Ponte e Matos, embora reconhecendo que as investigações matemáticas partilham alguns aspectos em comum com outros tipos de actividades de resolução de problemas, distinguem *problemas de matemática* de *investigações matemáticas*, referindo que, enquanto os problemas podem ser caracterizados por terem objectivos e dados bem definidos, as investigações são mais 'soltas' relativamente a estes aspectos. Acrescentam ainda que a primeira tarefa do aluno é tornar as

investigações mais precisas, um factor que partilham com a actividade de formulação de problemas (problem posing).
Ver PONTE (J.P.) e MATOS (J.F.), 1992, "Cognitive Processes and Social Interactions in Mathematical Investigations" in Mathematical Problem Solving and New Information Technologies, Research in Contexts of Practice, J.P. Ponte, J.F. Matos, J.M. Matos, D. Fernandes (Eds.) NATO ASI Series, Series F: Computer and Systems Sciences, Vol. 89, Berlin, p.239.

(18) BORASI (R.), 1986, op. cit., pp.125-141.

(19) ABRANTES (P.), 1989, "Um (bom) Problema (não) é (só)..." in Educação e Matemática, Nº 8, Associação de Professores de Matemática, Lisboa, pp.7-10, p.35.

(20) BORASI (R.), 1986, op. cit., p.135.

(21) ABRANTES (P.), 1989, p.7.

(22) BORASI (R.), 1986, op. cit., p.126.

(23) Ibid, p.133. Sobre este instrumento ver, em especial, as pp.128-135.

(24) Sobre estas propostas ver, em especial, as pp.135-139, ibid. Na p.135, Borasi indica que os nomes que escolheu para legendar cada 'tipo de problema', embora inspirados por semelhanças com o uso corrente de tais palavras, devem considerar-se uma escolha arbitrária sua.
Refere ainda que apenas considerou ALGUMAS (maiúsculas no texto original) das possíveis combinações de diferentes atributos dos quatro elementos estruturais considerados. Acentua que seria interessante criar outras combinações possíveis, como por exemplo 'problemas' em que o contexto é completamente dado no texto mas a formulação é apenas vaga ou implicitamente dada.

(25) Ibid, p.135.

(26) ABRANTES (P.), 1989, op. cit., p.8.

(27) Ibid, p.9.

(28) BORASI (R.), 1986, op. cit., p.133.

(29) KILPATRICK (J.), 1985, op. cit., p.4. Este investigador refere que os seis exemplos foram escolhidos somente para ilustrar os vários significados de 'problema', não significando que eles sejam típicos ou apreciáveis.
Os dados apresentados no texto original dos exemplos foram adaptados à situação portuguesa.

(30) Expressão utilizada por KILPATRICK, ibid.

(31) ABRANTES (P.), 1989, op. cit., p.8.

(32) Por vezes, nas aulas de matemática do 7º ano do Curso Unificado, após os alunos terem estudado o processo de resolução de equações do primeiro grau a uma incógnita, o professor apresenta questões do tipo:
Numa quinta há galinhas e coelhos num total de 20 cabeças e 50 patas. Quantas galinhas e quantos coelhos há na quinta?
Estas questões são apresentadas por diversas vezes sob formas variadas, mas tendo sempre subjacente o mesmo raciocínio matemático. Assim, em vez de galinhas e coelhos pode falar-se em ovelhas e avestruzes, ou gansos e vacas, ou motas e autocarros, ou bicicletas e automóveis, etc. O que importa é que alguns animais possuam duas patas e outros quatro, ou que uns veículos possuam duas rodas e outros quatro.
Estas questões aparecem também, muito frequentemente, nas aulas do 8º ano do Curso Unificado após o estudo de sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas.

(33) STANIC (G.), KILPATRICK (J.), 1990, "Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum" in The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving, third printing, R. Charles & E. Silver (Eds.), Reston, Virginia, Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics, pp.1-3.

(34) Ibid, p.10.

(35) Esta temática é desenvolvida pelo autor, nomeadamente, em:
BORRALHO (A.)
•1990, Aspectos Metacognitivos na Resolução de Problemas de Matemática: Proposta de um Programa de Intervenção, Tesis para optar al Master en Tecnologia de la Education, Universidad de Salamanca, Madrid-Espanha, pp.86-88;
• 1991, "Funções dos Problemas no Processo Ensino/Aprendizagem da Matemática", in Educação e Matemática, Nº 17, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, pp.13,14.

(36) BORRALHO (A.), 1991, ibid, p.13.

(37) Ibid, p.14.

(38) ERNEST (P.), 1991, The Philosophy of Mathematics Education, Hampshire, The Falmer Press, pp. 287-289.
No capítulo onde inclui estes três conjuntos de perspectivas (pp.281-296), Ernest distingue, fundamentalmente, o conceito de problema do de investigação, salientando que a actividade de formulação de problemas é uma das componentes essenciais numa investigação. Este autor acentua, contudo, que o termo investigação é problemático por várias razões. Propõe que não deva ser identificado como a questão ou situação que serve de ponto de partida à actividade de pesquisa, uma vez que o processo de investigação envolve a colocação de novas questões e a redefinição da actividade incial. Sobre a interpretação que Ernest confere aos conceitos de problema e investigação, ver, por exemplo, as pp.284-286.
Na síntese apresentada neste trabalho sobre os três conjuntos de perspectivas referidas por Ernest, optou-se por incluir o que este autor designa por investigações no conceito de problema e resolução de problemas, considerados estes em sentido amplo.
Deste modo, os títulos originais utilizados para designar os três conjuntos de perspectivas, "Rejection of problem solving and investigations", "The incorporation of problems and investigations as content" e "Problem solving and investigations as pedagogy", foram adaptados, respectivamente, para "Rejeição da resolução de problemas", "Incorporação dos problemas como conteúdo" e "Resolução de problemas como pedagogia".

(39) Ibid, p.288.

(40) Ver STANIC (G.), KILPATRICK (J.), 1990, op. cit., em especial nas pp.4-13. *Tema* e *competência* são as traduções adoptadas, respectivamente, para *'theme'* e *'skill'* do texto original.

(41) Ibid, p.15.

(42) Referido por STANIC (G.), KILPATRICK (J.), ibid, p. 16.

(43) Ver PÓLYA (G.), 1986, "From the Preface of *Induction and Analogy in Mathematics*" in New Directions in the Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, pp.99-101.

(44) Ibid, p.100.

(45) PÓLYA (G.), citado por PUTNAM (P.), LAMPERT (M.), PETERSON (P.), 1990, "Alternative Perspectives on Knowing Mathematics in Elementary Schools" in Review of Research in Education, 16, C. Cazden (Ed.), Harvard University Graduate School of Education, Washington, American Education Research Association, p.101.

(46) Sobre este modelo ver, por exemplo, PÓLYA (G.), 1965, Comment Poser et Résoudre un Problème, deuxième Edition, Paris, Dunod.
Segundo Ernest, o modelo proposto por Pólya tem uma forte analogia com um modelo em três estádios indicado por Whewell cerca de um século antes. Ernest refere que os estádios indicados por Whewell são (1) clarificação, (2) coligação (indução) e (3) verificação.
Ver ERNEST (P.), 1991, op. cit., pp.282.

(47) STANIC (G.), KILPATRICK (J.), 1990, op. cit., p.17.

(48) Ibid, p.13.

(49) Sobre o problema matemático das quatro cores e a sua relevância filosófica ver, por exemplo, TYMOCZKO (T.), 1986, "The Four-Color Problem and its Philosophical Significance" in New Directions in the Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Birkhäuser, Boston, pp.243-266.

(50) Esta terminologia foi adaptada de Kilpatrick. Ver KILPATRICK (J.), 1985, op. cit., pp.2,3.

Capítulo II - Resolução de problemas em contextos escolares

Nota introdutória

Como foi referido na *Introdução à Segunda Parte* deste estudo, a análise de extractos de algumas das publicações consultadas, relativamente à problemática da resolução de problemas em educação matemática, evidencia que o próprio conceito de resolução de problemas pode ser considerado segundo perspectivas diversas. Há, no entanto, acordo, como refere Ernest (1), que a resolução de problemas se relaciona com pesquisa matemática, sendo o conceito abordado por este autor a partir de uma tripla vertente: o objecto da pesquisa, o processo de pesquisa e uma pedagogia baseada na pesquisa.

Seguindo esta lógica, no primeiro capítulo desta segunda parte do estudo procurou-se reflectir sobre o objecto de pesquisa, o próprio conceito de problema, bem como analisar possíveis funções e papéis da resolução de problemas no currículo de matemática.

Este segundo capítulo debruçar-se-á sobre resolução de problemas enquanto pedagogia baseada na pesquisa, ou, mais globalmente, enquanto abordagem pedagógica para o ensino e aprendizagem da matemática em contextos escolares.

É interessante constatar que muita da literatura de investigação em educação matemática, ao referir-se a resolução de problemas enquanto abordagem pedagógica, utiliza uma diversidade de expressões diferentes que parecem apresentar, contudo, um nó semântico comum.

Entre estas expressões encontram-se, por exemplo, "*enseignement par le problème*" (2), "*teaching mathematics through problem solving*" (2), "*problem solving as pedagogical approach to mathematics*" (2),"*ensino da matemática através da resolução de problemas*" (2) e"*teaching and learning mathematics via problem solving*" (2). Subjacente a estas expressões parece estar uma interpretação do que significa saber, aprender e ensinar matemática, diferente da que preside ao que, frequentemente, é designado por ensino tradicional da matemática (apesar da ambiguidade que esta expressão encerra) cuja natureza é, muitas das vezes, rotineira, instrumental, convergente e fortemente estruturada.

Assim, o nó semântico comum sobressai quando se contrasta a resolução de problemas, enquanto abordagem pedagógica, com as actividades de ensino e aprendizagem tipicamente realizadas por professores e alunos em diversas salas de aula de matemática.

Será esta a estratégia adoptada para estruturar este capítulo. Deste modo, e numa primeira secção, reflectir-se-á sobre abordagens da matemática frequentemente existentes em várias escolas e salas de aula, procurando caracterizar, em traços largos, o que é designado por *ensino da matemática típico*. Em seguida, problematizar-se-á este ensino e analisar-se-ão alguns dos seus limites.

A expressão *ensino da matemática típico* é utilizada para referir um conjunto frequente de actividades matemáticas desenvolvidas por professores e alunos em diversas salas de aula. A adopção desta expressão não significa negligenciar-se que cada "Escola possui traços particulares que lhe conferem uma identidade própria e uma autonomia relativa" (3), nem que cada sala de aula constitui um sistema de relações únicas, com uma dinâmica singular, que é influenciada quer pelos alunos, quer pelo professor, quer ainda pela própria instituição em que se insere.

Essa adopção pretende, antes, pôr em destaque a imagem de uniformidade e rotina que muitas das vezes caracterizam o ensino da matemática na Escola, sem, contudo, esquecer os esforços, em sentido contrário, de alguns professores.

É o desafio de encontrar formas concretas e diferentes de ensinar uma matemática também diferente, que conduz, numa segunda secção deste capítulo, a referir um novo movimento de reforma curricular em matemática centrado na resolução de problemas, e a reflectir, posteriormente, sobre o significado de *resolução de problemas enquanto via educativa* (4) para o ensino e aprendizagem da matemática na Escola.

1 - Ensino da matemática típico: Questões e alternativas

1.1 - O Ensino da matemática típico

O panorama actual do ensino da matemática, e das práticas pedagógicas existentes em diversas salas de aula onde se ensina e aprende esta disciplina, se bem que tenham particularidades próprias, específicas de cada situação de ensino e de cada país, apresentam linhas caracterizadoras comuns que atravessam fronteiras e que constituem motivos de preocupação entre educadores matemáticos espalhados por vários continentes.

Em Portugal, a compreensão do contexto educativo onde, actualmente, se inscrevem essas práticas, conduz a percorrer o passado recente do ensino da matemática e a recordar, embora brevemente, algumas das repercursões que o movimento da matemática moderna teve neste país.

Nesse âmbito, de entre as iniciativas destinadas a inovar o ensino da matemática, destacou-se uma experiência piloto desenvolvida, nos Cursos Complementares dos liceus, a partir de 1964-65, por Sebastião e Silva. O objectivo desta experiência era a preparação, pré-universitária, dos alunos vocacionados para o ingresso no Ensino Superior. Para tal, esse matemático elaborou programas e redigiu compêndios e livros guias, numa perspectiva de síntese entre o clássico e o moderno. Aí, os aspectos heurísticos articulavam-se com os dedutivos, e a matemática era, simultaneamente, apresentada como um instrumento das outras ciências e como uma ciência com características próprias (5).

A partir dos programas dessa experiência piloto, elaboraram-se e adoptaram-se novos currículos de matemática, que rapidamente se generalizaram a outros níveis de ensino. Esta generalização fez-se face a objectivos totalmente distintos dos visados por aquela experiência, em condições muito diferentes e perante uma conjuntura social inteiramente nova. Neste trajecto, a proposta pedagógica de Sebastião e Silva foi despida das suas componentes mais ambiciosas e inovadoras, entre as quais as indicações metodológicas que visavam que as salas de aula de matemática constituissem ambientes educativos propícios a uma formação matemática e científica de qualidade (6).

A partir daí, como é referido numa publicação da A.P.M., "a lógica adoptada para tentar obstar à progressiva degradação do ensino e da aprendizagem da matemática, foi invariavelmente a de ir retirando dos currículos, ou relegando para plano secundário, conteúdos e métodos considerados *mais difíceis* ou tradicionalmente considerados *menos essenciais*. Foram-se assim abrindo sucessivos buracos num corpo cuja estrutura se mantinha inalterada e que se reduzia cada vez mais a um *esqueleto* o que criava condições para que o dogmatismo e o formalismo (...) pudessem afinal ganhar ainda mais terreno" (7).

Hoje, ao pretender-se caracterizar, globalmente, o ensino da matemática em Portugal, constata-se a insuficiente tradição portuguesa de investigação empírica relacionada com esta problemática. No entanto, a reflexão sobre a história recente do ensino da matemática neste país, a par da análise de algumas publicações, estudos e opiniões manifestadas por educadores matemáticos, podem permitir estabelecer conjecturas plausíveis acerca de muitas das práticas pedagógicas actualmente existentes em diversas salas de aula.

Segundo a publicação da A.P.M. atrás referida, presentemente não se consegue reconhecer, nas práticas pedagógicas reais da generalidade das actuais aulas de matemática, "qualquer das preocupações fundamentais de Sebastião e Silva" (8). Encontra-se ausente a intuição, pois muitas das vezes as estratégias de ensino são delineadas do geral para o particular; as aplicações da matemática são ignoradas ou então substituídas por exercícios de aplicação, e a linguagem e rigor matemáticos surgem como imposições oriundas do exterior e não como necessidades que emergem da actividade matemática dos alunos.

Loureiro, numa investigação que desenvolveu, faz notar que para a maioria dos professores de matemática envolvidos num programa de formação por ela realizado, a matemática constitui uma "ciência feita e acabada cuja abordagem educativa deve ser feita num plano essencialmente formal" (9). Por seu lado, Guimarães, num estudo que conduziu, salienta que em geral os professores participantes concebem a aula de matemática como uma sequência de momentos alternados de exposição e prática. A função da exposição, que está fundamentalmente a cargo do professor, é transmitir a informação que o aluno recolhe. A prática é realizada pelos alunos, ocupa a maior parte do tempo lectivo e consiste, essencialmente, na resolução de exercícios de aplicação mais ou menos directa dos assuntos matemáticos anteriormente ensinados (10).

Opiniões manifestadas por matemáticos e educadores matemáticos, apontam no sentido de que, em Portugal, se mantém ainda "uma tradição no ensino da matemática excessivamente formalista" (11) constatando-se, nomeadamente, que os "manuais escolares mais populares no ensino secundário são os mais formalistas, os mais repetitivos" (12). Carvalho e Silva, apoiando-se na própria experiência, salienta que muitos professores de matemática "apresentam um conjunto de fórmulas e esperam que os alunos as repitam, com a ilusão de que vão ficar a percebê-las" (13). J.M. Matos, por seu turno, indica que para muita gente "a matemática é uma ciência acabada, (...) uma coisa que está feita e que os alunos têm que aprender no sentido de assumir aquilo que já existe" (14).

As actividades de ensino de muitos professores de matemática parecem assentar numa lógica repetitiva de organização, e no pressuposto de que a aprendizagem se processa por mecanismos de transmissão e absorção. Sendo a matemática, frequentemente, perspectivada como uma ciência já feita, muito lógica, exacta e bem definida, é comum a ideia de que, para os alunos aprenderem matemática, basta uma exposição clara e uma pedagogia do quadro e do giz. O processo de aprendizagem parece, pois, muitas das vezes, limitado ao acompanhamento das exposições do professor e à repetição e memorização de factos e procedimentos transmitidos por este ou ilustrados pelo livro de texto.

Deste modo, e em geral, as situações de ensino não se revestem de carácter problemático, sendo relegadas para plano secundário, ou encontrando-se mesmo ausentes actividades em que os alunos comunicam matematicamente, formulam e resolvem problemas, exploram, investigam e validam conjecturas matemáticas (15).

O quadro anteriormente descrito não é, contudo, exclusivo da realidade do ensino e aprendizagem da matemática em Portugal. Com efeito, nos EUA, Silver refere que os mais recentes resultados do NAEP evidenciam, tal como tinha sido já feito por anteriores relatórios, que nas salas de aula de matemática as explicações do professor constituem a maior parte das actividades de ensino; os alunos observam, essencialmente, o que o professor faz no quadro, e depois resolvem sózinhos exercícios adicionais, de aplicação mais ou menos directa, proporcionados por fichas ou livros de texto. O tempo em que estes se ocupam a trabalhar em pequenos grupos, ou envolvidos em actividades independentes como projectos e investigações, é muito pouco. Deste modo, indica o mesmo autor, em geral, na Escola, a matemática é feita para os alunos e não pelos alunos (16).

Silver salienta que não é pois de estranhar, como sugerem os resultados do NAEP, que a maior parte dos alunos veja a matemática como consistindo, essencialmente, na memorização de regras e não numa actividade criativa, em que há oportunidade para experimentar a excitação intelectual da pesquisa matemática produtiva.

Também Putnam, Lampert e Peterson destacam que, de acordo com diversos estudos e publicações, as perspectivas de ensino e aprendizagem que parecem estar subjacentes a muito do actual ensino da matemática, supõem que "ensinar é dizer e aprender é receber conhecimento". A aprendizagem é, frequentemente, concebida como um processo em que os alunos absorvem informação, fornecida pelos professores, e a armazenam como resultado da prática repetitiva e do reforço, e não como uma actividade pessoal e social de construção do próprio conhecimento (17).

Por seu lado, Raymond, *et al*, descrevem uma sala de aula de matemática tradicional a partir do seguinte quadro: o professor começa por corrigir o trabalho de casa proposto aos alunos no dia anterior, após o que lhes apresenta o conteúdo planificado para aquele dia, normalmente fornecendo-lhes as definições e algoritmos de que necessitam para realizar um novo trabalho de casa. Esta apresentação, que dura aproximadamente quinze ou vinte minutos, é em seguida ilustrada no quadro com alguns exemplos e, a partir daí, os alunos tentam resolver uma lista de tarefas que lhes é proposta, repetindo mecanismos e imitando o comportamento que lhes foi mostrado pelo professor (18).

Em resumo, a análise do que anteriormente foi referido, relativamente ao ensino e aprendizagem da matemática na Escola, permite evidenciar que, aí:

• não raras vezes, o saber matemático é apresentado aos alunos por meio práticas pedagógicas assentes numa lógica de transmissão, recepção e consumo de informações; nesta lógica, marcada pela uniformidade, é o professor quem detém a informação, controla e valida o modo como ela circula;

• frequentemente, a matemática surge aos olhos dos alunos numa forma estruturada, formal e acabada, através de uma via de que foram eliminados os avanços e recuos intrínsecos às actividades de produção do saber;

• em geral, as aplicações da matemática, a verbalização e discussão de ideias e procedimentos matemáticos, a experimentação, a formulação e refutação de conjecturas, e a resolução de problemas abertos, são aspectos que não fazem parte da experiência matemática dos alunos;

• provavelmente, para muitos alunos a aprendizagem da matemática é uma experiência onde o rigor, a linguagem, as regras e procedimentos matemáticos constituem um conjunto de códigos inquestionáveis, abstractos, de aceitação obrigatória e sem ligação com a vida real.

A abordagem da matemática, caracterizada deste modo, é designada neste trabalho pela expressão genérica de *ensino da matemática típico*. Aqui, as tendências mecanicistas que orientaram o ensino da matemática anteriormente ao movimento da matemática moderna parecem entrelaçar-se, sem dificuldades, com a perspectiva estruturalista proposta por este movimento. Na verdade, estas duas tendências não são incompatíveis. Como é referido numa publicação da A.P.M., "o recrudescimento das tendências mecanicistas coexiste sem problemas com uma visão (e uma prática) dogmática e formalista da matemática e do seu ensino; as duas perspectivas não só não entram em conflito como, pelo contrário, se complementam" (19).

O ensino da matemática típico está em profundo contraste, não só com as competências e capacidades matemáticas socialmente reconhecidas como necessárias aos cidadãos que viverão numa sociedade tecnológica de informação e aprendizagem, mas também com resultados de investigações desenvolvidas no âmbito da matemática, epistemologia da matemática, sociologia, psicologia cognitiva e educação matemática. Contrasta ainda com muitas das actuais orientações propostas no âmbito do desenvolvimento curricular relativamente ao ensino e aprendizagem da matemática.

Destacam-se, em seguida, algumas das questões que se colocam ao ensino da matemática típico e que são levantadas, por um lado, a partir da análise de algumas das direcções em que actualmente se desloca a filosofia da matemática, e por outro, a partir de trabalhos desenvolvidos no âmbito da psicologia.

1.2 - Problematização do ensino da matemática típico

1.2.1 - Algumas questões levantadas a partir da matemática

A primeira parte deste estudo procurou caracterizar algumas facetas da prática matemática real. Como foi referido, a matemática progride a partir de um movimento simultaneamente interno e externo, como resposta a desafios e problemas emergentes da própria matemática, da vida do dia a dia e de outras ciências. A análise da prática real dos matemáticos evidencia que a matemática é uma actividade humana que decorre de um diálogo entre pessoas que tentam resolver problemas matemáticos.

Quer enquanto corpo de saber objectivo e socialmente partilhado, quer enquanto actividade individual de produção de conhecimento, a matemática desenvolve-se, pois, através de uma actividade simultaneamente individual e social, falível mas fiável, lógica e extra-lógica e em que o debate, a argumentação, a correcção do erro, a discussão crítica e a comunicação entre os membros da comunidade matemática desempenham um papel fundamental.

Se se olhar o conhecimento como situado em contextos físicos e sociais, muito do que se aprende acerca de matemática é implícito (20), tornando-se por isso fundamental que, para aprender matemática de maneiras significativas e úteis, se participe na actividade matemática considerada nas suas múltiplas vertentes e não se adquiram simplesmente competências e procedimentos matemáticos explicitamente descritos ou modelados, como acontece frequentemente no ensino da matemática típico.

Além disso, a participação plena na actividade matemática não é possível sem que haja comunicação. No entanto, no ensino da matemática típico parece ser reduzido o espaço em que os alunos podem interpretar e descrever ideias matemáticas, verbalizar os seus pensamentos, acordar o significado das palavras e símbolos usados, reconhecer a importância de definições aceites por todos e assumir a responsabilidade de validarem o seu próprio pensamento. Em suma, o desenvolvimento de capacidades de comunicação matemática pelos alunos parece ser, aí, uma dimensão pobremente explorada. Tal facto poderá dificultar uma compreensão da matemática conceptualmente profunda.

Uma outra vertente, que tem vindo a ser destacada actualmente por diversos educadores educadores matemáticos, é a importância de que a matemática seja vista, pelos alunos, como uma actividade em que é fundamental encontrar sentido. Entre estes educadores encontra-se Schoenfeld, para quem "no seu âmago fazer matemática é fundamentalmente um acto de encontro de sentido, um acto de pegar em coisas separadas (do ponto de vista matemático) e ver o que as faz ajustarem-se" (21). Este autor salienta ainda que esta é uma componente fundamental do "aprender a pensar matematicamente" (21) que não se desenvolve simplesmente pelo domínio de procedimentos matemáticos formais.

Considerar a matemática como um acto de encontro de sentido torna-se particularmente pertinente quando se considera a aprendizagem da linguagem matemática. De facto, muitos educadores matemáticos estão hoje de acordo que é possível que os alunos aprendam, de cor, muita da simbologia matemática e muitos dos procedimentos para manipular e efectuar cálculos com esses símbolos, sem terem compreendido o que são as quantidades ou entidades matemáticas por eles representadas, nem terem construído o conhecimento necessário para usar esses procedimentos quando necessário (22).

Nesta medida, o facto de um aluno reproduzir as propriedades de uma estrutura matemática através de uma linguagem simbólica rigorosa não significa, necessariamente, que tenha construído uma compreensão da matemática superior à de outro que repete, mecanicamente, a técnica de resolução de um exercício utilizando um procedimento anteriormente memorizado.

Ora, o ensino da matemática típico parece pôr a ênfase na aprendizagem de procedimentos aplicados a símbolos matemáticos através de processos que os deixam, muitas vezes, desligados do conhecimento conceptual (23). Corre-se, assim, o risco de muitos alunos aprenderem a manipular símbolos e procedimentos matemáticos como meras marcas no papel para as quais não conseguem construir significados, abdicando de encontrar sentido na matemática que lhes é ensinada.

Deste modo, e utilizando uma expressão de Wilder, privilegiar-se-á um ensino do tipo "*reflexo simbólico*" negligenciando-se oportunidades para os alunos utilizarem a sua "*iniciativa simbólica*" (24).

Finalmente, Lakatos (25) criticou os cálculos 'infalibilistas' da matemática, nos quais os resultados obtidos lógico-dedutivamente se tornam vazios de significado e tendem a transmitir uma incontestabilidade autoritária. Quem aprende não está em posição de criticar, mas apenas aceitar passivamente o que lhe é apresentado e tal facto pode induzir níveis profundos de ansiedade.

Deste modo, um ensino da matemática que apresente uma ciência já feita no seu aspecto lógico-dedutivo, e que seja conduzido de modo a levar os alunos a acreditarem que a sua própria experiência e curiosidade não são importantes, mais do que dificultar a compreensão poderá ensinar uma obediência inquestionável, reforçando o poder instituído, e, nalguns casos, estar na base de uma ansiedade pouco favorável à aprendizagem.

1.2.2 - Algumas questões levantadas a partir da psicologia

No âmbito da psicologia, uma das vertentes importantes a analisar quando se pretende reflectir sobre processos de ensino e aprendizagem prende-se com a dinâmica de construção da pessoa, ou seja, o processo pelo qual cada sujeito se apropria da realidade que lhe é exterior e, simultaneamente, o processo pelo qual modifica essa realidade.

A compreensão desta dinâmica pode ser iluminada pelo conceito de *Sistema-Pessoa* concebido por Lerbet (26).

O Sistema- Pessoa: Lerbet parte de estudos desenvolvidos por Piaget e Carl Rogers, e de um modelo de interpretação da Pessoa proposto por Lewin. Considera que o Sistema-Pessoa constitui um sistema aberto e hipercomplexo, que compreende um Ego - o conjunto {je(acção), moi(identidade), soi(relação com o outro)} - e um "mundo próprio" ou "meio pessoal" ("milieu personnel"). Este sistema está mergulhado num "meio envolvente" ("environnement") com o qual efectua constantemente trocas. O "meio pessoal" faz parte quer desse sistema quer do "meio envolvente". Relativamente ao significado de "meio pessoal", Lerbet escreve:

> "a pessoa 'produz' uma organização que 'retém' do meio envolvente (...) e serve-se dela lucidamente ou não". É essa produção que constitui o seu mundo próprio (27).

O Sistema-Pessoa enriquece-se e complexifica-se, crescendo em abstracção e autonomia, através de processos de interiorização e descentração que complexificam, respectivamente, o "meio pessoal", por integração do "meio envolvente", e o Ego, por integração do "meio pessoal". Estes processos integrativos têm opostos que Lerbet designa, respectivamente, por exteriorização e centração (28).

Constituindo o "meio pessoal" a apropriação que cada sujeito faz dos diversos "meios envolventes" com que vai sendo confrontado, poder-se-á dizer que existe uma correspondência biunívoca entre os diferentes "meios pessoais" e as pessoas vivas. Para Lerbet, a Educação consiste em proporcionar práticas que ajudem ao desenvolvimento do Ego e do "mundo próprio" que são, pois, específicos de cada um e irredutíveis aos outros (29).

Olhar a Pessoa como um sistema aberto é reconhecer que cada sujeito é um ser único que constrói e cria o seu "mundo próprio" a partir do mundo que o rodeia, é reconhecer a relevância dos contextos em que se vai situando e que podem, ou não, ajudá-lo no processo de complexificação.

Olhar a Pessoa como um sistema hipercomplexo é reconhecer o aleatório, o não programável e a entropia que existe em cada um. É considerar tudo isto como intrínseco à lógica de construção do vivo, vivo esse que se auto-organiza constantemente e que, por isso, não pode ser reduzido a modelos explicativos não dinâmicos, simplistas e gerais.

Por um lado, estes aspectos evidenciam que cada ser humano reage de modo único a cada tarefa ou situação que lhe é apresentada, de acordo com a especificidade de cada uma, e através de processos não lineares nem rigidamente programáveis por antecipação. Deste modo, educar não será procurar a igualdade através do proporcionar contextos educativos caracterizados pela uniformidade, rigidamente estruturados e iguais para todos, mas sim "entrar num conjunto de sistemas com finalidades por vezes contraditórias mas que convém no entanto conciliar" (30).

Por outro lado, a relevância reconhecida aos sucessivos 'meios envolventes' em que a Pessoa se vai situando, faz sobressair que o processo de complexificação não começa nem se esgota na sala de aula nem na Escola, mas que toda a vida é um possível espaço de desenvolvimento que interage, permanentemente, com os espaços de educação formal.

Assim, o preservar a originalidade de cada um em toda a socialização inerente ao acto educativo, é um dos aspectos que emerge como particularmente pertinente na perspectiva sistémica da Pessoa referida por Lerbet.

Este aspecto conduz a questionar a uniformidade associada à lógica de transmissão, repetição e consumo de informações, que parece existir no ensino da matemática típico.

Esta uniformidade, para lá de dificultar a evolução do sistema sala de aula para formas mais complexas e ricas em informação, parece ser incompatível com a diversidade dos modos de aprender dos diferentes alunos.

Considerando ainda estudos desenvolvidos no âmbito da psicologia, o ensino da matemática típico pode, por outro lado, ser questionado a partir de perspectivas construtivistas sobre a aprendizagem. Apesar da diversidade de posições que estas perspectivas encerram, segundo Putnam, Lampert e Peterson (31) há um claro consenso entre os educadores matemáticos de que as crianças não absorvem simplesmente a informação matemática tal como lhes é apresentada, mas interpretam-na activamente, construindo o conhecimento matemático a partir dos referenciais de conhecimento que já possuem e das interacções que estabelecem com os diversos contextos físicos e sociais.

A hipótese de que os alunos são construtores activos na produção do seu conhecimento matemático tem importantes implicações na forma de pensar sobre o que significa saber e aprender matemática.

Se o conhecimento já existente em quem aprende modela de uma forma fundamental o que vai ser aprendido, e se aprendizagem da matemática não pode ser vista como um processo directo de transmissão e absorção de conhecimento, então não pode supor-se que o que é apresentado pelo ensino coincide com o que os alunos aprendem.

Como refere Resnick, há que alargar a definição de ensino de apresentação directa de informação ou modelação de procedimentos, de modo a incluir "qualquer coisa que é feita para ajudar alguém a adquirir uma nova capacidade" (32) ou, como acentua Sinclair, de modo a optimizar os esforços dos alunos para que sejam capazes de "re-descobrir ou re-inventar" objectos matemáticos de pensamento (33).

Como síntese poder-se-á referir que todas as questões e limites anteriormente salientados, quer a partir da matemática quer da psicologia, permitem evidenciar que o ensino da matemática típico põe sérios obstáculos a que todos os alunos se apropiem, na Escola, de uma cultura matemática possibilitadora de um crescimento em autonomia.

É-se, assim, confrontado com o grande desafio de encontrar formas concretas e diferentes de ensinar uma matemática também diferente.

1.3 - Alternativas ao ensino da matemática típico

Surgem hoje, provenientes de diversos quadrantes, apelos frequentes relacionados com urgência de melhorar a qualidade do ensino escolar da matemática de modo a proporcionar aos alunos uma educação matemática que os prepare, adequadamente, para viver no século XXI.

Estes apelos traduzem-se num novo movimento de reforma do ensino e aprendizagem da matemática que tem vindo a ganhar, progressivamente, cada vez mais terreno.

Putnam, Lampert e Peterson, referindo-se nomeadamente aos EUA, indicam que, embora em certa medida o novo movimento de reforma recorde o movimento da matemática moderna, apresenta, relativamente a este, singularidades em aspectos importantes que levam muitos educadores matemáticos a esperar que ele tenha mais sucesso que o seu antecessor (34).

Estas singularidades prendem-se, em particular, com a natureza do ensino e aprendizagem da matemática. Os actuais esforços de reforma parecem dedicar mais atenção a investigações sobre a aprendizagem desenvolvidas no âmbito da psicologia, bem como a estudos relacionados com o ensino da matemática na sala de aula. Quanto ao conteúdo da matemática escolar, enquanto que o movimento da matemática moderna foi modelado pela ênfase nas estruturas algébricas e na matemática formal e abstracta da teoria de conjuntos, o actual movimento de reforma parece sobretudo integrar a preocupação de abordar holisticamente a matemática (evidenciando as suas conexões com/e em várias situações), e centrar-se na resolução de problemas, que surge como devendo constituir o foco da matemática escolar.

Particularmente em Portugal, a importância concedida à resolução de problemas evidencia-se, também, no actual movimento de Reforma Curricular em curso, "componente fundamental da Reforma do Sistema Educativo (...) [em que] estão em causa as opções educacionais que mais directamente se hão-de projectar na formação de gerações futuras" (35).

Neste novo movimento de renovação do ensino da matemática, a resolução de problemas não é, contudo, igualada à aplicação linear, pelos alunos, de técnicas e procedimentos, anteriormente ilustrados pelo professor, a questões estereotipadas e sempre explicitamente formuladas.

De facto, numa das publicações consultadas - "*Curriculum and Evaluation Standards for Schools Mathematics*", um documento no âmbito do desenvolvimento curricular - a resolução de problemas é perspectivada em sentido amplo, referindo-se que constitui um objectivo prioritário do ensino da matemática, uma parte integrante de toda a actividade matemática e um processo de investigação e aplicação que, atravessando todo o currículo, fornece um contexto em que os conceitos devem ser aprendidos e as competências desenvolvidas (36).

E relativamente a Portugal, no ponto "Orientação Metodológica" incluído nos novos programas de matemática do 2º e 3º Ciclos do Ensino Básico, afirma-se que a resolução de problemas, enquanto processo de aprendizagem, "proporciona um contexto no qual se constroem conceitos e se descobrem relações"; enquanto actividade, "estimula o espírito de pesquisa, dando aos alunos oportunidades de observar, experimentar, seleccionar e organizar dados, relacionar, fazer conjecturas, argumentar, concluir e avaliar"; além disso, constitui "um meio para desenvolver a capacidade de comunicar, a perseverança, o espírito de cooperação" (37).

Deste modo, do actual movimento de reforma curricular em matemática, emerge como fundamental a resolução de problemas perspectivada enquanto contexto para ensinar, aprender, investigar e compreender o saber matemático.

Tente examinar-se um pouco mais de perto esta perspectiva analisando o significado de *resolução de problemas enquanto via educativa* para o ensino e aprendizagem da matemática. Esta análise terá por base a observação de alguns documentos de natureza curricular recentemente publicados e de alguma da literatura relativa a esta problemática.

2 - Resolução de problemas enquanto via educativa para o ensino e aprendizagem da matemática

O objectivo desta secção é iluminar a compreensão do significado de *resolução de problemas enquanto via educativa* para o ensino e aprendizagem da matemática. Não se pretende encontrar uma definição precisa que abarque todos os pontos de vista, segundo os quais a resolução de problemas é considerada, no âmbito da educação matemática. Procura-se, antes, a partir de perspectivas partilhadas por diversos educadores matemáticos, encontrar alguns indicadores que permitam diferenciar esta abordagem pedagógica do que, na secção anterior deste capítulo, foi designado por *ensino da matemática típico*.

Para o efeito, observam-se, em primeiro lugar, dois documentos recentemente publicados que contêm muitas das linhas de força propostas em diversos países, entre os quais Portugal, para a educação matemática. Em segundo lugar, analisa-se alguma da literatura teórica relativa à temática da resolução de problemas perspectivada enquanto abordagem pedagógica.

Os documentos observados intitulam-se:

• *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, definitivamente publicado em 1989 pelo National Council of Teachers of Mathematics (38).

• *Renovação do Currículo de Matemática*, publicação editada pela primeira vez em 1988 pela Associação de Professores de Matemática (39).

O primeiro documento, *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, que será abreviadamente designado por *Standards*, foi seleccionado como objecto de observação uma vez que, embora não seja um documento de investigação, sistematiza numerosas orientações sobre a matemática a ser ensinada nas escolas, muitas das quais expressam hipóteses e perspectivas partilhadas por muitos membros da comunidade de educadores matemáticos (40).

Foi elaborado por uma Comissão constituída por professores, supervisores, investigadores no campo da educação, formadores de professores e matemáticos universitários, e, como nele se afirma, destina-se "a estabelecer um quadro amplo para guiar a reforma da matemática escolar na próxima década" (41).

O segundo documento, *Renovação do Currículo de Matemática*, abreviadamente designado por *R.C.M.*, foi escolhido porque em Portugal constitui uma importante publicação sobre a renovação dos currículos de matemática dos Ensinos Básico e Secundário, apresentada pela primeira vez em 1988 pela Associação de Professores de Matemática e posteriormente integrada no conjunto de Documentos Preparatórios editados pela Comissão de Reforma do Sistema Educativo a ser enviado para escolas portuguesas.

Relativamente à temática em estudo, a observação destes documentos organizar-se-á em torno de três vertentes principais:

• A natureza das actividades propostas para o ensino e aprendizagem da matemática, destacando-se o papel do professor e do aluno;

• As situações problemáticas e os problemas considerados relevantes;

• O ambiente de ensino e aprendizagem na sala de aula.

A observação dos documentos referidos terá como ponto de partida a identificação das finalidades e objectivos que aí são considerados prioritários para a educação matemática.

2.1 - *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*

Os objectivos indicados pelo documento *Standards* pretendem que os alunos "se tornem cidadãos produtivos e auto-realizados no próximo século" (42). Na definição destes objectivos evidencia-se a preocupação de ter em conta as características da matemática enquanto processo, corpo de conhecimento e criação humana, bem como aspectos relacionados com a sociedade no seu conjunto e com os alunos enquanto pessoas.

Na área da educação, os objectivos propostos reconhecem a importância de as escolas proporcionarem, a todos os alunos, oportunidades para serem matematicamente letrados, para desenvolverem capacidades de auto-aprendizagem que lhes serão necessárias ao longo de toda a vida, e para se tornarem um eleitorado informado, isto é, para se tornarem cidadãos aptos a discutir, reflectidamente, sobre questões em aberto, capazes de ler, interpretar e compreender informações complexas, e algumas vezes contraditórias, existentes numa sociedade tecnológica (43).

Estes objectivos remetem para os conceitos de *capacidade matemática* ("*mathematical literacy*") e *poder matemático*, que adquirem uma importância central no documento em estudo.

Por *capacidade matemática* entende-se a "capacidade individual para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente, bem como para utilizar efectivamente uma variedade de métodos matemáticos na resolução de problemas" (44).

O aluno, ao adquirir esta capacidade, desenvolve o seu *poder matemático*, conceito que inclui ainda o desenvolvimento da autoconfiança pessoal (45).

Os autores do documento *Standards* explicitam um pouco mais o que entendem por *capacidade matemática* através dos objectivos gerais que propõem para os alunos: aprender a dar valor à matemática, tornar-se confiante na sua própria capacidade para fazer matemática, tornar-se um resolvedor de problemas matemáticos e aprender a comunicar e a raciocinar matematicamente.

Na área da educação matemática, e de uma forma sucinta, pode dizer-se que objectivos relacionados com tradicionais competências, conceitos e aplicações, são subordinados a objectivos mais gerais relacionados com a resolução de problemas e comunicação. Considera-se que a resolução de problemas é o eixo fundamental da matemática escolar, e que a aprendizagem da comunicação é facilitada pelo trabalho desenvolvido em torno de situações problemáticas.

Relativamente à natureza do ensino e aprendizagem na Escola, uma das linhas de força que atravessa todo o texto do documento *Standards* é a ideia de que "saber matemática é fazer matemática" (46). É referido que o privilégio que o ensino tradicional desta disciplina concede à aprendizagem de algoritmos e técnicas de cálculo, como percursora da resolução de problemas, ignora o facto de que o conhecimento emerge de problemas, residindo o valor das informações apenas "na medida em que são úteis no decurso de alguma actividade com finalidade própria" (46).

Assim, aquele documento propõe que as salas de aula sejam "lugares onde problemas interessantes são regularmente explorados, utilizando ideias matemáticas importantes" (47) e põe a tónica em que os alunos devem aprender matemática em ambientes educativos onde sejam encorajados a "explorar, adivinhar e mesmo fazer erros e corrigi-los (...) a ler, escrever e discutir matemática, a conjecturar, testar e construir argumentos sobre a validade de uma conjectura" (47).

Neste âmbito, a resolução de problemas é considerada como um método de investigação e aplicação no contexto do qual os alunos têm oportunidades de investigar e compreender temas matemáticos, formular problemas a partir de situações internas e externas à matemática, desenvolver uma diversidade de estratégias de resolução, analisar e questionar resultados encontrados e adquirir confiança na utilização significativa da matemática. No seu sentido mais alargado, considera-se que resolução de problemas é, aproximadamente, sinónimo de fazer matemática, constituindo um processo pelo qual o edifício matemático vai sendo, simultaneamente, construído e reforçado.

O documento *Standards* considera que a forma "como a matemática é ensinada é tão importante como aquilo que é ensinado" (48). O que importa é que os alunos estudem matemática em contextos propícios ao encontro de sentido para os conceitos e ideias, e experimentem matemática em situações nas quais reconheçam que a aprendizagem desta disciplina representa um ganho de poder pessoal. Relativamente ao ensino, propõe que este seja desenvolvido a partir de situações problema que estabeleçam uma "necessidade de saber" (49) e fomentem a motivação para o desenvolvimento de conceitos.

A compreensão das actividades de ensino e aprendizagem envolvidas nesta abordagem da matemática, pode ser alargada pela análise dos verbos utilizados para descrever o que se espera dos alunos quando estes fazem matemática. Por exemplo, nas normas intituladas "A Matemática como Resolução de Problemas" podem encontrar-se os verbos seguintes: descobrir, formular, discutir, investigar, conjecturar, validar, argumentar, verificar, seleccionar, interpretar, questionar, reflectir e decidir.

A leitura do documento *Standards* destaca a importância da diversidade dos processos de trabalho a utilizar na sala de aula, bem como das situações problema. As situações problema devem ter em conta a experiência dos alunos, considerar a sua maturidade, quer cultural quer matemática, ser suficientemente simples para que os recursos cognitivos destes forneçam instrumentos adequados de abordagem e, simultaneamente, complexas o suficiente para que constituam um desafio, e para que esta abordagem se possa revestir de formas diversas (50).

Além disso, aquelas situações devem envolver uma variedade conveniente de assuntos matemáticos, ser abertas e flexíveis quanto aos métodos, possibilitar que na sala de aula haja oportunidades para trabalho individual, em grupo e com toda a turma, e proporcionar a formulação de problemas pelos alunos, componente que é considerada "vital na resolução de problemas" (51).

Quanto aos problemas a resolver, a preocupação com a diversidade manifesta-se, para lá das especificidades inerentes às estratégias e conteúdos matemáticos envolvidos na resolução de cada um, por exemplo na sua origem e nos tempos provavelmente necessários à resolução (52).

Relativamente à aprendizagem, o documento *Standards* advoga que esta deve ter por pano de fundo a procura de resposta a questões, primeiro a um nível intuitivo, depois ao nível da generalização e finalmente ao nível da justificação. Sustenta uma perspectiva construtivista que se reflecte nas orientações que propõe para o ensino. Mais do que uma apresentação rotineira das ideias matemáticas, feita de uma forma polida e acabada com o objectivo de que os alunos as assimilem, o ensino deve integrar uma variedade de métodos que possibilitem oportunidades frequentes para os alunos investigarem e construírem significados a partir de novas situações, gerarem e sustentarem conjecturas, discutirem, aplicarem e avaliarem as suas descobertas.

Deste modo, em ambientes de ensino orientados numa perspectiva de resolução de problemas, as ideias matemáticas surgem, fundamentalmente, dos alunos, através de um processo de pesquisa orientada, sendo as aulas permeadas pela colocação de questões que estimulem o raciocínio, especulações, investigações e explorações (53).

Pretende-se que a resolução de problemas ocorra num ambiente de sala de aula que encorage e apoie os esforços dos alunos. Ora, o documento *Standards* indica que "os alunos aprendem mais e melhor num ambiente acolhedor, no qual se sintam livres para explorar ideias matemáticas, colocar questões, discutir as suas ideias e cometer erros" (54). Assim, este documento refere que, quando se recorre à resolução de problemas para desenvolver uma ideia, os professores devem encorajar os alunos a adivinhá-la corajosamente, adiar juízos de valor e explorar as sugestões apresentadas. Devem ainda ajudá-los a reflectir, criticamente, sobre sugestões de outros alunos, e orientá-los na avaliação das suas próprias formas de raciocinar em lugar de fomentar a dependência de uma autoridade exterior que lhes diga se estão certos ou errados.

Neste contexto, a atitude do professor é crucial. Ouvindo o que os alunos têm a dizer, e encorajando-os a ouvirem-se mutuamente, possibilita que se possa estabelecer uma atmosfera de respeito mútuo facilitadora da aprendizagem da matemática e da resolução de problemas.

2.2 - Renovação do Currículo de Matemática

A publicação *Renovação do Currículo de Matemática* (*R.C.M.*), interligando componentes cognitivas, afectivas, sociais e individuais, indica que a educação matemática "deve ajudar os alunos a tornarem-se indivíduos não dominados mas pelo contrário independentes - no sentido de competentes, críticos, confiantes e criativos - nos aspectos essenciais em que a sua vida se relaciona com a matemática" (55).

Neste âmbito, é referido que "a aprendizagem da matemática deve estimular a curiosidade e desenvolver a capacidade do aluno para formular e resolver problemas que contribuam para a compreensão, apreciação e poder de intervenção no mundo que nos rodeia; e, nesse processo, deve proporcionar-lhe a experiência e o prazer de enfrentar um desafio e o desenvolvimento da auto-confiança intelectual" (56).

Esta publicação indica que a aprendizagem não se processa por absorção passiva, considera que "a experiência matemática deve constituir o paradigma das actividades escolares nesta disciplina" (57) e refere que os alunos necessitam de aprender num ambiente intelectualmente estimulante no qual experimentar e fazer matemática sejam actividades naturais e desejadas.

A matemática é perspectivada como "uma actividade criativa constituindo a formulação e a resolução de problemas o seu núcleo fundamental" (58). É ainda referido que as situações problemáticas constituem elementos geradores de contextos de aprendizagem ricos, propiciadores de aquisições e desenvolvimentos relevantes e duradouros (58).

Assim sendo, na *R.C.M.* considera-se que "a resolução de problemas deve estar no centro do ensino e da aprendizagem da matemática em todos os níveis escolares" (59), e indica-se que poderá constituir um elemento integrador e gerador de significado que contribuirá para uma maior flexibilidade curricular.

Perspectivar a resolução de problemas como "o estilo privilegiado da actividade matemática dos alunos" (60), conduz a que, neste documento, a execução de projectos envolvendo outras disciplinas ou no campo da própria matemática, seja considerada uma vertente a privilegiar. Indica-se que o desenvolvimento de projectos, que pode ser objecto de trabalhos individuais ou de grupo, acarreta uma diversidade de actividades em que os alunos têm que "explorar, investigar e analisar situações, discutir entre si e com o professor as várias estratégias e processos de trabalho, formular e resolver problemas, inventar nova terminologia, expor e argumentar em defesa das conclusões a que vão chegando, redigir os resultados e compará-los, eventualmente, com os de outros alunos ou grupos de alunos" (61).

Tal como acontecia também no documento *Standards*, quando a aprendizagem da matemática na Escola é encarada e orientada numa perspectiva de resolução de problemas, a diversidade, quer ao nível dos problemas a trabalhar e dos projectos a executar, quer ao nível das actividades a desenvolver na sala de aula, assume na *R.C.M.* um papel de relevo. A importância dessa diversidade encontra-se, por exemplo, explícita nos seguintes extractos:

> • "a resolução de problemas consiste, acima de tudo, numa larga variedade de processos, actividades e experiências intelectuais, e portanto as situações de aprendizagem não devem ser entendidas de forma restritiva mas sim corresponder a esta diversidade" (62).
>
> • "Entende-se aqui resolução de problemas num sentido amplo em que se considera essencial o trabalho à volta de situações problemáticas variadas e envolvendo processos e actividades como experimentar, conjecturar, matematizar, provar, generalizar, discutir e comunicar." (63).

A *R.C.M.* salienta que, quando a resolução de problemas está no centro do ensino e aprendizagem da matemática, os conceitos, ideias, métodos e técnicas matemáticas devem emergir de problemas e de situações problemáticas e não precedê-las. Tal não significa, contudo, que deixem de ser importantes tarefas que não sejam problemáticas nem geradoras de problemas. Significa, sim, um posicionamento contrastante com aquele que iguala a resolução de problemas a um campo de aplicação de algoritmos, conhecimentos factuais e técnicas de cálculo previamente aprendidas. Significa, ainda, uma demarcação nítida do identificar a resolução de problemas, quer com o "encontrar a solução para questões com determinadas características (que permitam considerá-las problemas) e que deveriam estar previamente bem formuladas e bem compreendidas" (64), quer com "uma actividade a desenvolver apenas à margem das actividades curriculares ou em paralelo com estas" (65).

Assim, a resolução de problemas, enquanto abordagem para o ensino e aprendizagem da matemática, apresenta-se na *R.C.M.* como uma alternativa a um ensino escolar da matemática marcado pela uniformidade de actividades e processos de trabalho, e onde a ênfase é, acima de tudo, colocada na memorização de definições e na aprendizagem de 'regras e técnicas'.

Esta abordagem conduz, necessariamente, a um novo papel para o professor:

> "Na nova aula de matemática, o professor deixará de ter meramente o papel de fornecedor de informação para passar a ser também um <u>organizador das actividades</u>, um <u>facilitador da aprendizagem</u>, um <u>dinamizador do trabalho</u>, um <u>companheiro de descoberta</u>" (66).

Pelo que foi dito, evidencia-se que os documentos *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* e *Renovação do Currículo de Matemática* apresentam, relativamente à problemática da resolução de problemas enquanto abordagem pedagógica para o ensino e aprendizagem da matemática, perspectivas compatíveis nos seus aspectos essenciais. Deixam, contudo, algumas questões em aberto.

No sistema escolar actual, a sala de aula de matemática constitui o lugar privilegiado onde os alunos vêm, fundamentalmente, receber informação ou redescobrir resultados previamente programados. Num ensino da matemática através da resolução de problemas, a sala de aula torna-se o lugar privilegiado para desenvolver a actividade matemática. Isto supõe que o ensino proporcione problemas motivantes de que os alunos se apropriem.

Mas o que será um bom problema para um aluno? Como suscitar no aluno o desejo da pesquisa? Bastará ao professor assegurar simplesmente a existência de um problema a resolver, e possibilitar que os alunos, individualmente ou em grupo, o explorem, para que o conhecimento matemático vá, de qualquer maneira, emergir naturalmente?

Além disso, quando a resolução de problemas é perspectivada enquanto abordagem pedagógica para o ensino e aprendizagem da matemática, afirma-se que o conhecimento matemático deve emergir da experiência com resolução de problemas e não precedê-la. Ora, em particular no que se relaciona com a aprendizagem de técnicas e algoritmos matemáticos, qual o significado desta orientação? Significará proporcionar actividades de aprendizagem em que estes utensílios são directamente ensinados pelo professor a partir do momento em que os alunos descobrem que os problemas se resolvem mais facilmente se se puder utilizá-los? Ou dever-se-á ajudar os alunos a inventar algoritmos e técnicas?

Finalmente, as questões colocadas pelo professor na sala de aula, de modo a fazer emergir nos alunos as ideias matemáticas através de um processo de pesquisa orientada, tornam-se fundamentais ao pretender-se orientar o ensino e aprendizagem da matemática numa perspectiva de resolução de problemas. Fica no entanto a dúvida de se as questões colocadas pelo professor devem obedecer, necessariamente, a uma estrutura sequencial e anteriormente programada ao pormenor. Em que consistirá criar, na sala de aula, o que Silver designa por "atmosfera de resolução de problemas" (67)?

Procure-se em seguida aprofundar a compreensão de algumas destas questões, analisando o significado de ensinar matemática através da resolução de problemas a partir de literatura de investigação relacionada com esta temática.

2.3 - Perspectivas teóricas sobre resolução de problemas

Situando-nos numa perspectiva construtivista, e seguindo Cobb, Wood e Yackel (68), poder-se-á referir que, ensinar matemática através da resolução de problemas constitui uma abordagem pedagógica que reconhece que são os alunos quem melhor pode decidir o que é problemático para eles, que considera que os problemas acontecem na sala de aula quando os alunos tentam atingir os <u>seus</u> objectivos, e que os encoraja a construir soluções em que encontrem sentido.

Segundo os mesmos autores, tal não significa, contudo, que as actividades de ensino ponham a ênfase no que, tradicionalmente, se considera problemas, nomeadamente nos estereotipados 'problemas de palavras' dos livros de texto e nos problemas que são dados aos alunos já 'prontos a fazer'. Em lugar disso, acentuam que as situações problemáticas para os alunos se podem revestir de uma diversidade de formas consoante os seus conhecimentos, motivações, experiências, projectos e finalidades. Estas situações podem incluir, por exemplo, a resolução de obstáculos ou contradições que acontecem quando os alunos usam os saberes que possuem, a surpresa perante resultados inesperados, a verbalização do seu pensamento matemático, a explicação ou justificação de uma solução encontrada, a resolução de pontos de vista conflituais e a negociação de significados de modo a poder construir-se, na sala de aula, um domínio consensual no qual seja possível conversar acerca de ideias matemáticas (69).

Note-se que, assim sendo, a apresentação pelo professor, na sala de aula, de uma situação por ele considerada problema, não conduz, necessariamente, a que haja aprendizagem por parte do aluno. Como salienta Meirieu, se bem que não se restringindo ao domínio da educação matemática, é preciso tomar cuidado com uma certa ingenuidade pedagógica que supõe que nas situações-problema os conhecimentos irão emergir, por assim dizer, naturalmente.

De facto, escreve este autor:

"A situação problema põe simplesmente o sujeito no caminho, envolve-o numa interacção activa entre a realidade e os seus projectos, interacção desestabilizadora e re-estabilizadora, graças aos desfasamentos introduzidos pelo formador (...) e é nesta interacção que se constrói, muitas vezes irracionalmente, a racionalidade" (70).

Para Bouvier "um ensino da matemática que considere como prioritárias as capacidades de conjecturar e provar designa-se por ensino heurístico, ensino pelo problema" (71) ou, "por vezes, por 'problem-solving' [em inglês no original], se bem que este termo dissimule práticas e intenções pedagógicas diversas" (72). Segundo este autor, no *ensino pelo problema* o aluno na sala de aula é chamado a participar, activamente, na construção do seu conhecimento, de certo modo, à semelhança do que fazem os cientistas.

Mais precisamente, Bouvier (73), seguindo Higgins, refere que um ensino pelo problema caracteriza-se pela intenção de:

- apreender o conteúdo sob a forma de problemas;
- centrar-se sobre questões que incitem o aluno a utilizar diversas heurísticas;
- favorecer uma certa incerteza crítica considerando alternativas;
- encorajar a actividade do aluno.

O ensino pelo problema favorece, segundo Bouvier, uma actividade colectiva onde a comunicação multidireccional desempenha um papel de relevo. Aqui, o professor deve encontrar e propor aos alunos situações em que estes têm que escolher critérios, tomar decisões e colocar-se problemas. Deve ainda favorecer o acesso dos alunos à informação, estimulá-los a formular problemas, responder a questões que os ajudem a orientar-se e colocar questões que os conduzam a prosseguir e a aprofundar os temas em estudo (74).

No ensino pelo problema não se pretende que as questões colocadas pelo professor sejam de resposta directa, nem que obedeçam a uma sequência rígida previamente programada. Aliás, esta é uma das vertentes em que, segundo Bouvier, o ensino pelo problema se distingue claramente dos "métodos ditos da redescoberta" (75):

> "Ensinar contentando-se em colocar questões directas não merece ser designado por ensino heurístico; o ensino pelo problema não é uma prática sistemática de adivinhas (...) os manuais que utilizam uma abordagem por redescoberta tentam paradoxalmente aprisionar o aluno e o professor numa sequência programada" (76).

A liberdade do aluno poder escolher os métodos de abordagem dos problemas que pretende resolver, sem ter que seguir a par e passo as indicações do professor, é também uma das vertentes que Ernest (77) destaca na resolução de problemas considerada enquanto abordagem pedagógica para a matemática. Este autor, no âmbito de pedagogias baseadas na pesquisa, distingue, quanto ao grau de abertura, a "resolução de problemas enquanto pedagogia" do que designa por pedagogias da "descoberta guiada" e da "formulação de problemas". A distinção é ilustrada pela comparação, nos três casos, dos papéis do professor e do aluno.

A "descoberta guiada" é, para aquele autor, o método com menor grau de abertura. O professor propõe problemas ou escolhe situações com um determinado objectivo, e guia os alunos na procura das soluções reservando-lhes o papel de o seguirem.

Na "resolução de problemas enquanto pedagogia", o professor coloca o problema facilitando que os alunos façam intervir, criativamente, o seu conhecimento, na resolução das situações apresentadas. Aqui, os alunos têm o controlo sobre os métodos de resolução que utilizam mas não sobre a forma e conteúdos de ensino, que são controlados pelo professor.

A abordagem da matemática através da "formulação de problemas" é, segundo Ernest, a que tem maior abertura. Aqui o professor concebe o contexto inicial de ensino ou ratifica as iniciativas dos alunos, facilitando que formulem problemas e questões para investigação e que os resolvam mais ou menos livremente. Deste modo, o poder dos alunos exerce-se para lá dos métodos de aprendizagem que utilizam.

Como síntese, poder-se-á referir que se torna difícil definir *resolução de problemas enquanto via educativa*, para o ensino e aprendizagem da matemática, procedendo por abstracção, isto é, através de uma propriedade comum a todas as referências que lhe são feitas ao longo das publicações consultadas. Encontram-se aí, contudo, alguns indicadores que podem possibilitar distinguir um ensino da matemática em que a resolução de problemas é perspectivada enquanto via educativa, ou seja, *um ensino da matemática via resolução de problemas*, do que, na primeira secção deste capítulo, foi designado por *ensino da matemática típico*.

2.4 - Ensino da matemática típico e ensino da matemática via resolução de problemas: Que diferenças? Que mudanças?

2.4.1 - Algumas linhas caracterizadoras do ensino da matemática via resolução de problemas

Apresentam-se, em seguida, algumas linhas caracterizadoras do *ensino da matemática via resolução de problemas*. Nesta apresentação, procuram destacar-se algumas das mudanças que este ensino parece requerer relativamente ao que foi designado por *ensino da matemática típico*.

• Matemática como resolução de problemas: Em geral, face a um problema que se deseja resolver, realizam-se cálculos, fazem-se tentativas, executam-se experiências. Em seguida, a partir dos dados obtidos, emitem-se uma ou várias propostas de resolução, imagina-se uma(s) conjectura(s) que pareça(m) razoável(eis). Posteriormente, tenta provar-se a conjectura que se formulou. A conjectura estabelecida poderá ser posta em causa, poderá haver necessidade de realizar novos cálculos, multiplicar os exemplos, procurar contra-exemplos, refutar a conjectura inicial e emitir outra mais precisa e plausível. É através deste processo heurístico e dialéctico, que não é exclusivo dos investigadores em matemática, que o saber matemático, considerado quer no sentido individual quer social do termo, vai progredindo.

É um pouco deste espírito que parece ser valorizado no ensino da matemática via resolução de problemas. Na concepção e organização dos ambientes de ensino, procura-se ter em conta a perspectiva da matemática como ciência a fazer, em contraponto à apresentação da matemática, pelo professor, como uma ciência já feita, havendo a preocupação de integrar diversas vertentes da prática matemática real desenvolvida pelos matemáticos no seio da comunidade científica. Experimentar, discutir, refutar, conjecturar, argumentar, intuir e deduzir são actividades naturais e desejadas. Em particular, reconhece-se como fundamental que o professor estimule a comunicação matemática, e auxilie os alunos a verbalizar, sem medo, as suas ideias, de modo a tornar-se clara a necessidade da linguagem e simbologia matemáticas. Schoenfeld salienta que se facilita, assim, que os alunos possam encontrar sentido para terminologia e convenções matemáticas (78).

• Aprendizagem como construção de conhecimento: No ensino da matemática típico as actividades de ensino esgotam-se, frequentemente, no fornecer directamente aos alunos um conjunto de informações impostas pelo currículo e pelo professor, e possibilitar que estes as armazenem. Este ensino parece assentar numa lógica em que a aprendizagem é concebida como um processo de transmissão e absorção de informações.

Em lugar disso, no ensino da matemática via resolução de problemas, o aluno, de ouvinte passivo, deverá passar a assumir-se como construtor activo do seu conhecimento. Procura-se ter em conta que o conhecimento matemático não é passivamente recebido, mas antes activamente construído por "aproximações sucessivas" (79), reconhecendo-se a importância de a matemática ser experimentada pelos alunos de modo a que estes lhe encontrem sentido.

• Resolução de problemas como contexto de aprendizagem versus identificação exclusiva da resolução de problemas como campo de aplicação: No ensino da matemática típico é provável que a resolução de problemas seja, por vezes, rejeitada, ou, frequentemente, considerada equivalente a um campo de aplicação de conceitos, algoritmos e procedimentos matemáticos directamente ensinados pelo professor anteriormente à apresentação dos problemas.

No ensino da matemática via resolução de problemas põe-se em causa esta perspectiva. Isto não significa que, na sala de aula, deixem de ser necessárias tarefas que não são problemáticas, do mesmo modo que "seria limitativo, prejudicial e absurdo, diminuir o valor que têm no processo educativo as exposições do professor que abram novos caminhos e perspectivas de trabalho aos alunos, que os ajudem a clarificar conceitos e a sintetizar trabalho realizado" (80). Só que a ênfase não é posta nem na aprendizagem de técnicas, nem na lógica de transmissão e consumo de informações.

Em lugar disso, considera-se que o saber matemático deve emergir de situações problemáticas em que os alunos tentam atingir objectivos a que se propõem. Os problemas, para os alunos, chegam tanto das interacções sociais na sala de aula como de tentativas individuais para desenvolver actividades propostas pelo ensino.

Um bom problema será aquele que o aluno sente como seu, que o leva a repensar ideias matemáticas já conhecidas, que faz nascer lacunas nos saberes que já possui, que o conduz à formulação de conjecturas e novos problemas, que constitui um enigma que ele procura e deseja desvendar e em que reconhece um espaço para investir.

Ensinar matemática via resolução de problemas conduz, pois, à necessidade de criar, na sala de aula, um clima de suporte que encorage a participação voluntária dos alunos, estimule a sua curiosidade e não a embote "como acontece quando se substitui a descoberta pela rotina e os problemas pelos exercícios" (81).

Neste âmbito, o papel do professor não é equivalente ao de uma autoridade directiva que dissemina informação. A sua tarefa será antes, utilizando uma expressão de Meirieu, fazer enigma com o saber; fazer do saber um enigma (82). Esta tarefa requer que ele assuma um papel muito diferente do que lhe era reservado no ensino da matemática típico.

• Diversidade versus uniformidade: Ensinar matemática via resolução de problemas parece ser criar condições para que haja um justo equilíbrio entre o trabalho individual, o trabalho em pequeno grupo e o trabalho com toda a turma. É olhar os problemas como desafios que podem chegar de vários campos, revestir-se de formas variadas e envolver processos, estratégias, conteúdos, tempos e espaços diversos.

Assim, a diversidade na organização das situações de aprendizagem é uma das vertentes a destacar no ensino da matemática via resolução de problemas. Esta diversidade contrapõe-se à uniformidade que parece constituir uma das características do ensino da matemática típico, e repercute-se em alterações profundas, nomeadamente, nas actividades dos alunos, no papel do professor e na natureza dos ambientes educativos existentes nas salas de aula.

A ênfase na diversidade, aliada às restantes linhas caracterizadoras do ensino da matemática via resolução de problemas anteriormente indicadas, evidencia a emergência de uma nova dinâmica na sala de aula, muito complexa e cheia de imprevistos, onde se torna fundamental a existência de uma atmosfera de liberdade, responsabilidade e expansão de ideias propícia ao questionamento e discussão crítica, e que requer, da parte do professor, flexibilidade, bom senso e tacto pedagógico.

Analise-se um pouco mais de perto o papel do professor no contexto da nova sala de aula de matemática.

2.4.2 - Um novo papel para o professor e uma nova cultura da sala de aula

Ensinar matemática via resolução de problemas requer, da parte do professor, bem mais do que ensinar problemas que se resolvem através da aplicação directa de um algoritmo. É necessário que os problemas constituam um desafio, que os alunos se envolvam directamente no processo de resolução, na construção da sua própria aprendizagem, que os modos de ensino sejam variados e que as actividades de aprendizagem não se esgotem no ouvir as explicações do professor e no resolver problemas individualmente.

Aqui, cabe ao professor o papel de mediador, facilitador da aprendizagem, companheiro de invenção e descoberta, tornando-se fundamental que tenha em conta o que os alunos pensam. Neste âmbito importa que o professor:

• reconheça que cada aluno aprende de maneira única e chega à Escola tendo já desenvolvido um conjunto de técnicas, padrões de pensamento, noções, conceitos, que não podem ser negligenciados na organização das situações de aprendizagem;

• diversifique as actividades de ensino e tenha em conta a dimensão pessoal do tempo para que as originalidades dos processos de aprender não sejam penalizadas;

• organize as actividades de ensino de modo a que a sala de aula de matemática constitua um ambiente propício à experimentação, ao questionamento, à livre troca de ideias e discussão crítica, à conjectura e à refutação.

Assim, abordar a matemática via resolução de problemas conduz, antes de mais, ao questionamento de práticas frequentemente consideradas inquestionáveis no ensino da matemática típico. Este questionamento parece indiciar, em particular, a necessidade de criar uma nova cultura na sala de aula de matemática.

A importância de olhar as salas de aula de matemática como meios culturais é hoje destacada por diversos investigadores, entre os quais se encontra Schoenfeld (83). Este autor chama, em particular, a atenção, para o facto da aprendizagem da matemática na Escola envolver, simultaneamente, fenómenos cognitivos e culturais. Na sua perspectiva, as salas de aula de matemática constituem meios culturais em que há crenças, e valores relativos à natureza e finalidades da matemática, que são perpetuados pelas práticas e rituais diários. Assim, o sentido que cada aluno atribui à matemática é modelado não apenas pelo conteúdo do que é explicitamente ensinado, mas também por um conjunto de regras, muitas vezes implícitas, que são parte integrante da cultura da matemática escolar.

No ensino da matemática típico, faz parte da cultura existente em diversas salas de aula que o professor possua o saber e o transfira sem falhas para os alunos. Estes, por seu lado, para mostrar que aprenderam, necessitam de responder num curto espaço de tempo, e sem errar, a todas as questões que o professor lhes coloca. Devem memorizar o que o professor lhes diz que é para aprender mesmo que possam não lhe encontrar sentido.

Considerar que a aprendizagem da matemática envolve componentes culturais, e constatar que a matemática escolar pode ser vista por diversos alunos como uma actividade em que não é necessário encontrar sentido, tem diversas consequências para a aprendizagem da resolução de problemas. Por exemplo, Schoenfeld (84) salienta que a explicação para que tantos alunos, de diversos países, tenham 'resolvido' problemas do tipo do da *idade do capitão* (85) poderá estar em que, frequentemente, no contexto da matemática escolar, os problemas de palavras têm sempre uma resposta (normalmente um número inteiro) que se obtém manipulando os números que aparecem no enunciado. Assim, em algumas salas de aula de matemática os alunos aprendem, por vezes, que para resolver problemas de matemática basta combinar números, quer proceder ou não dessa maneira faça sentido noutros contextos.

Neste âmbito, uma questão pertinente a colocar, quando se pretende ensinar matemática via resolução de problemas, é a de como criar, na sala de aula, ambientes de ensino em que as práticas diárias possam reflectir a ideia de que a matemática é uma actividade que faz sentido.

Por outro lado, considerando, como Kilpatrick, que parece altamente provável que as abordagens bem sucedidas em melhorar a capacidade de resolução de problemas, tenham sido capazes de modificar, de algum modo, os "termos do contrato social negociado na sala de aula entre professor e alunos" (86), outra questão que se levanta é a de qual a natureza destes contratos sociais bem como dos contratos sociais negociados entre alunos, em salas de aula em que a resolução de problemas é aprendida e ensinada com sucesso. Quais os factores envolvidos na formulação destes contratos?

Estas são algumas das muitas questões que ficam após a análise do significado de resolução de problemas enquanto via educativa para o ensino e aprendizagem da matemática. A sua exploração poderá contribuir para iluminar a compreensão de alguns dos factores envolvidos nas mudanças que esta abordagem da matemática parece requerer relativamente ao ensino da matemática típico.

Nota conclusiva

Diversos investigadores, ao reflectirem sobre as orientações que importa ter em conta nas práticas escolares, de modo a que estas favoreçam uma compreensão poderosa da matemática, indicam que fazer matemática deve ser um acto de encontro de sentido.

Assim, quando hoje se analisa quais as vertentes que o currículo de matemática e a Escola devem privilegiar, de modo a ajudar os alunos a apreciar e compreender matemática de uma maneira poderosa e útil para si próprios e para a sociedade, uma das grandes questões é saber quais as condições necessárias para que cada aluno possa encontrar, na Escola, condições cada vez mais propícias ao encontro de sentido para a matemática.

Variados estudos, investigações e relatórios, evidenciam que estas condições passam, não apenas por mudanças nos conteúdos disciplinares específicos incluídos no currículo, mas, e sobretudo, pela alteração dos processos de trabalho a que se dá ênfase na lógica de consumo de informação muitas das vezes existente em diversas salas de aula de matemática.

Foi este o contexto que constituiu o ponto de partida para, neste capítulo, se reflectir sobre *resolução de problemas enquanto via educativa* para o ensino e aprendizagem da matemática. A diversa literatura consultada possibilitou encontrar alguns indicadores que poderão ajudar a compreender as especificidades desta via relativamente ao que foi caracterizado e designado, na primeira secção deste capítulo, por *ensino da matemática típico.*

A reflexão anteriormente apresentada parece apoiar a hipótese de que o ensino da matemática típico supõe que há um saber matemático específico, independente da experiência, exacto, fortemente estruturado, formal, rigoroso, infalível e abstracto por natureza, que o professor possui, que é externo ao aluno, mas que este pode receber e adquirir através de mecanismos de imitação e absorção. Nesta lógica, o saber do aluno poderá ser validado pela autoridade do professor, e fazer matemática poderá ser interpretado como consistindo, essencialmente, em recordar factos e aplicar correctamente regras quando o professor faz perguntas.

Assim, é provável que haja professores para quem a principal finalidade da educação matemática seja a transmissão de saberes, aparecendo a resolução de problemas como um tema separado do saber matemático básico a fornecer pela Escola, um objectivo talvez importante mas secundário. E é igualmente provável que a resolução de problemas seja, não raras vezes, caracterizada:

- por os problemas serem, frequentemente, considerados sinónimos de exercícios e/ou exclusivamente identificados com questões, explicitamente formuladas, que se resolvem a partir dos dados incluídos no enunciado que são, geralmente, em número necessário e suficiente;

• pela necessidade de ser o professor a fornecer os problemas aos alunos;

• pela importância do aluno identificar, prontamente, as operações e estratégias necessárias à resolução, e resolver os problemas num curto espaço de tempo;

• pela resolução dos problemas poder ser obtida a partir da aplicação directa de competências anteriormente aprendidas.

Ora a *resolução de problemas enquanto via educativa* parece estar longe desta perspectiva. Para alguns professores, aderir e levar à prática esta via pode não ser fácil, linear, ou mesmo desejável. Com efeito, para alguns professores, a tão proclamada certeza da matemática poderá ter sido o que mais os atraiu para esta ciência e para o seu ensino. E o facto dos alunos resolverem problemas por métodos não previsíveis nem ensinados, tornando mais difícil a tarefa de localizar o que foi ensinado, poderá ser interpretado, por esses professores, como uma forma de pôr em causa a sua capacidade para ensinar.

Para outros professores, a matemática poderá ser exclusivamente vista segundo uma perspectiva instrumentalista, e uma conjectura limitada poderá equivaler a uma resposta errada e portanto penalizável. Tal facto poderá levar os alunos a inibir-se de produzir conjecturas devido ao medo da avaliação feita pelo professor. Além disso, a "imprevisibilidade e incerteza" (87) que caracterizam a abordagem da matemática via resolução de problemas, podem originar que os alunos tenham um grau de liberdade maior que pode não ser, necessariamente, bem vivido por eles próprios e mesmo por alguns professores.

Assim, torna-se particularmente pertinente compreender como interpretarão os professores de matemática a resolução de problemas, no contexto da educação matemática, e quais as variáveis que interagem com esta interpretação. É sobre esta temática que incidirá a terceira parte deste estudo.

Notas

(1) ERNEST (P.), 1992, "Problem Solving: Its Assimilation to the Teacher's Perspective" in Mathematical Problem Solving and New Information Technologies, Research in Contexts of Practice, J.P. Ponte, J.F. Matos, J.M. Matos, D. Fernandes (Eds.), Nato ASI Series, Series F: Computer and Systems Sciences, Vol. 89, Berlin, p. 288.
Pesquisa matemática foi a tradução adoptada para "mathematical inquiry".

(2) Algumas das publicações e autores que utilizam estas expressões são indicados em seguida:
• *"enseignement par le problème"*- BOUVIER (A.), 1981, La Mystification Mathématique, Paris, Hermann, p.135.
• *"teaching mathematics through problem solving"*- COBB (P.), WOOD (T.), YACKEL (E.), 1991, "A Constructivist Approach to Second Grade Mathematics" in Radical Constructivism in Mathematics Education, E. Von Glasensfeld (Ed.), Netherlands, Kluwer Academic Publishers, p.158.
• *"problem solving as pedagogical approach to mathematics"*- ERNEST (P.), 1992, ibid, p. 289.
• *"ensino da matemática através da resolução de problemas"*- MOURÃO (A.P.), 1990, "Algumas Reflexões sobre a Importância da Resolução de Problemas no Ensino-Aprendizagem da Matemática" in PROFMAT 89 - Actas, Organizado por E. Veloso e H. Guimarães, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, p.345.
• *"teaching and learning mathematics via problem solving"*- RAYMOND (A.), SANTOS (V.), MASINGILA (J.), 1991, The Influence of Innovative Instructional Processes on Mathematical Beliefs Systems, Comunicação apresentada em Abril de 1991 no Annual Meeting of the American Educational Research Association, policopiado, pp.3,4.

(3) CANÁRIO (R.), 1989, O Estabelecimento de Ensino no Contexto Local, Conferência proferida na Universidade de Verão "Le Management en Éducation", Universidade de Toulouse, 4-10 Julho 1989, policopiado, p.5.

(4) Neste trabalho a expressão *resolução de problemas enquanto via educativa* para o ensino e aprendizagem da matemática é considerada sinónima de *ensino da matemática via resolução de problemas.*

(5) Influências do movimento da matemática moderna em Portugal podem ser destacadas, por exemplo, a partir da consulta das publicações seguintes:
• SILVA (J. S.)
-1964a, Compêndio de Matemática, 1º volume, 6º ano, Texto piloto editado pelo Ministério da Educação com a cooperação da O.C.D.E. segundo o Projecto Especial STP-4/SP/Portugal;
-1964b, Guia para a Utilização do Compêndio de Matemática, 1º volume, 6º ano, Texto piloto editado pelo Ministério da Educação com a cooperação da O.C.D.E. segundo o Projecto Especial STP-4/SP/Portugal;
-1965-66a, Compêndio de Matemática, 2º volume, 7º ano, Texto piloto editado pelo Ministério da Educação com a cooperação da O.C.D.E. segundo o Projecto Especial STP-4/SP/Portugal;
-1965-66b, Compêndio de Matemática, 3º volume, 7º ano, Texto piloto editado pelo Ministério da Educação com a cooperação da O.C.D.E. segundo o Projecto Especial STP-4/SP/Portugal;
-1965-66c, Guia para a Utilização do Compêndio de Matemática, volumes II e III-7º ano, Texto piloto editado pelo Ministério da Educação com a cooperação da O.C.D.E. segundo o Projecto Especial STP-4/SP/Portugal;
-1967, Aditamento ao 2º Volume do Texto-Piloto, Texto piloto editado pelo Ministério da Educação com a cooperação da O.C.D.E. segundo o Projecto Especial STP-4/SP/Portugal;
• MATOS (J. F.), PONTE (J. P.) *et al* (Eq. Responsável), 1981, Inflexão, Nº2, Folha Informativa do Grupo para a Renovação do Ensino da Matemática da Sociedade Portuguesa de Matemática, Lisboa, Sociedade Portuguesa de Matemática;
• SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA (Ed.), 1982, Ensino da Matemática Anos 80, Actas do Colóquio realizado no âmbito do encontro internacional de homenagem a José Sebastião e Silva, Lisboa, Sociedade Portuguesa de Matemática;
• ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA (Ed.), 1990, Renovação do Currículo de Matemática, 3ª edição, Lisboa, Associação de Professores de Matemática.

(6) Ver, por exemplo:
- MATOS (J.F.), PONTE (J.P.), *et al*, (Eq. Responsável), 1981, ibid, pp.2,3;
- ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA (Ed.), 1990, ibid, pp.12,13.

Referências à forma como Sebastião e Silva concebia as aulas de matemática podem encontrar-se, por exemplo, em SILVA (J.S.), 1965-66c, ibid, pp1-9.

(7) ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA (Ed.), 1990, ibid, p.13.

(8) Ibid, p.51.

(9) Referência feita por Ponte. Ver PONTE (J.P.), 1992, Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação, in Educação Matemática, Colecção Temas de Investigação, Instituto de Inovação Educacional, Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, p.211.

(10) GUIMARÃES (H.), 1988, Ensinar Matemática: Concepções e Práticas, Tese Apresentada para Obtenção do Grau de Mestre em Educação, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.

(11) INSTITUTO DE EDUCAÇÃO EDUCACIONAL (Org.), 1991, "A Educação Matemática, Mesa Redonda" in Noesis, Nº. 21, pp.20-27. O texto da citação é de Professor Doutor Domingos Fernandes. Ver p.26.

(12) Ibid. O texto da citação é de Professor Doutor Jaime Carvalho e Silva. Ver p.27.

(13) Ibid, p.25.

(14) Ibid. O texto da citação é de Dr. José Manuel Leonardo de Matos. Ver p. 21.

(15) Por exemplo, Loureiro indica que a maioria dos professores que participaram no estudo que desenvolveu, "via as situações problemáticas e as actividades de exploração por ela propostas como inadequadas do ponto de vista educativo" Esta autora é referida por PONTE (J.P.), 1992, op. cit. p.214.

Referências ao frequente carácter não problemático das situações de ensino bem como à pouca ênfase concedida a actividades em que os alunos são desafiados a comunicar matematicamente podem encontrar-se, por exemplo, em:
- ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA (Ed.), 1990, op. cit.
- FERNANDES (D.), 1991, "Insucesso em Matemática: E não Podemos nós, os Professores, Exterminá-lo?" in Noesis, Nº 21, Lisboa, Instituto de Inovação Educacional, pp. 28-30.
- GUIMARÃES (H.), 1988, op. cit.

(16) SILVER (E.), 1990, "Teaching and Assessing Mathematical Problem Solving: Toward a Research Agenda" in The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving, third printing, R. Charles & E. Silver (Eds.), Reston, Virginia, Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics, p.280.

NAEP é a abreviatura utilizada para 'National Assessment of Educational Progress'.

(17) PUTNAM (R.), LAMPERT (M.), PETERSON (P.), 1990, "Alternative Perspectives on Knowing Mathematics in Elementary Schools" in Review of Research in Education, 16, C. Cazden (Ed.), Harvard University Graduate School of Education, Washington, American Education Research Association, pp.130, 131;

"Ensinar é dizer e aprender é receber conhecimento" foi a tradução adoptada para a expressão original "teaching as telling and learning as received knowing" utilizada por estes autores.

(18) RAYMOND (A.), SANTOS (V.), MASINGILA (J.), 1991, op. cit., pp.3,4.

(19) ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA (Ed.), op. cit., p.13.

(20) PUTNAM (R.), LAMPERT (M.), PETERSON (P.), 1990, op. cit., pp.93-95, p. 138.

(21) SCHOENFELD (A.), 1990, "Problem Solving in Context(s) in The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving, third printing R. Charles & E. Silver (Eds.), Reston, Virginia, Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics, p.87.

Também Putnam, Lampert e Peterson acentuam a importância da actividade matemática nas escolas ser uma actividade de encontro de sentido. Ver PUTNAM (R.), LAMBERT (M.), PETERSON (P.), 1990, ibid, p.137.

(22) PUTNAM (R.), LAMPERT (M.), PETERSON (P.), 1990, ibid, p.83.

(23) Segundo Putnam, Lampert e Peterson há diversos investigadores que distinguem o *conhecimento conceptual* do *conhecimento processual*. Entre eles encontram-se Nesher, Gelman, Meck, Greeno, Riley, Hiebert e Lefevre. Nomeadamente, Hiebert e Lefevre referem que o conhecimento conceptual é um "conhecimento que é rico em relações. Pode ser conceptualizado como uma teia de conhecimento entrelaçado, uma rede em que as relações são tão importantes como as peças discretas de informação". O conhecimento processual consiste em conhecimento acerca "(a) do sistema formal simbólico da matemática e (b) de regras, algoritmos ou procedimentos usados para resolver tarefas matemáticas".

Ver PUTNAM (R.), LAMPERT (M.), PETERSON (P.), 1990, ibid, pp.83,84,85. As citações incluídas nesta nota encontram-se na p. 83.

(24) WILDER (R.), 1986, "The Cultural Basis of Mathematics" in New Directions in The Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, pp.193,194.
Relativamente aos conceitos de "*reflexo simbólico*" e"*iniciativa simbólica*" Wilder escreve, no texto original:
"Man possesses what we might call *symbolic iniciative*; that is, he assigns symbols to stand for objects or ideas, sets up relationships between them, and operates with them as though they were physical objects. So far as we can tell, no other animal has this faculty, although many animals do exhibit what we might call *symbolic reflex* behavior. Thus, a dog can be taught to lie down at the command "Lie down" and of course to Pavlov's dogs, the bells signified food".

(25) Referido por BIBBY (N.), ABRAHAM (J.), 1989, "Social History of Mathematical Controversies: Some Implications for the Curriculum" in Mathematics, Education and Society, Document Series No. 35, Paris, Unesco, p.56.

(26) LERBET (G.), 1981, Une Nouvelle Voie Personnaliste: Le Système-Personne, U.N.M.F.R.E.O., Éditions Universitaires, Maurecourt. Ver em especial as pp.9-53.

(27) Ibid, pp.22,23.

(28) Ibid. Sobre a dinâmica do Sistema-Pessoa, ver pp.31-53.

(29) Sobre a Educação e o Sistema-Pessoa ver LERBET (G.), 1981, "La Personne et Son Éducation", ibid, pp.145-165.

(30) Ibid, p.145.

(31) PUTNAM (R.), LAMPERT (M.), PETERSON (P.), 1990, op. cit., pp.87,88,89.
Kilpatrick refere que o construtivismo é uma expressão ambígua e pouco clara, que inclui múltiplas perspectivas, e que pode ser compatível com teorias educativas diversas. Ver KILPATRICK (J.), 1987, "What Constructivism Might Be in Mathematics Education" in Psychology of Mathematics Education, PME-XI, Vol. I, J. Bergeron, N. Herscovics, C. Kieran (Eds.), Montreal.
Não se pretende, no âmbito deste trabalho, reflectir sobre o construtivismo nas suas múltiplas perspectivas, nem analisar possíveis inconsistências ou lacunas entre elas. Opta-se, em vez disso, por salientar pontos de acordo subscritos por diversos investigadores cognitivos e educadores matemáticos relativamente a esta temática, de modo a fazer sobressair diferenças entre perspectivas construtivistas sobre a aprendizagem e a aprendizagem concebida como um processo de absorção.

(32) Citado por PUTNAM (R.) LAMPERT (M.), PETERSON (P.), 1990, ibid, p.92.

(33) Citado por PUTNAM (R.) LAMPERT (M.), PETERSON (P.), 1990, ibid.

(34) PUTNAM (R.), LAMPERT (M.), PETERSON (P.), 1990, ibid, p.64.

(35) MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO, 1991b, Organização Curricular e Programas, Vol. I, Ensino Básico, 3º Ciclo, Reforma Educativa, Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário, Lisboa, Imprensa Nacional- Casa da Moeda, E.P., p.7.

(36) NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 1989, Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Reston, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics, p.54.

(37) MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 1991b, op. cit., p.194.
Não se pretende analisar, neste trabalho, se estas orientações relativamente à resolução de problemas são desenvolvidas de uma forma articulada, consistente e coerente, ao longo de todo o texto global dos novos programas de matemática.
De facto, se bem que o "Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem" não traduza, em toda a sua extensão, muitas das opções enunciadas relativamente à resolução de problemas, no ponto "Orientação Metodológica", incluído em "Organização Curricular e Programas", considera-se, tal como o fez a Associação de Professores de Matemática, que as opções relativas à resolução de problemas são valiosas, sendo já importante o simples facto de aparecerem explicitamente enunciadas num programa de matemática.
De algum modo salienta-se, assim, que a formação de cidadãos livres, responsáveis, autónomos e solidários "(...) dotados de imaginação criadora e de capacidade de adaptação a um mundo em mudança" (texto utilizado nos novos programas de matemática do 2º e 3º Ciclo do Ensino Básico relativamente ao que se pretende de um aluno no termo do Ensino Básico), capazes de resolver problemas e analisar com espírito critico o mundo em que vivem, não se faz com um ensino da matemática em que, de uma maneira uniforme, todos os alunos se limitam a absorver informação e resolver, mecanicamente, conjuntos de exercícios esteriotipados que lhe são impostos .
Relativamente à referência feita, nesta nota, à Associação de Professores de Matemática, ver ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA (Ed.), 1990,

Parecer Relativo aos Projectos de Programas de Matemática do 1º, 2º e 3º Ciclos do Ensino Básico, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, p.18.
Os textos do "Plano de Organização do Ensino-Aprendizagem" e da "Organização Curricular e Programas" são os referidos na Bibliografia apresentada no final deste trabalho.

(38) O documento *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, contém um conjunto de normas ('*standards*') para o currículo de matemática da América do Norte, e foi produzido com o objectivo de melhorar a qualidade da matemática escolar. Resultou de um trabalho desenvolvido, ao longo de aproximadamente dois anos, em que a partir de textos base elaborados pela "Comission on Standards for School Mathematics" se recolheram, durante o ano lectivo de 1987-1988, numerosas reacções que, posteriormente, foram integradas na versão final. Guimarães refere, apoiando-se em S. Frey e Crosswite, que as normas propostas não constituem uma lista de objectivos comportamentais nem pretendem prescrever um currículo, mas antes "descrever uma visão para a matemática escolar". Ver GUIMARÃES (H.), 1990, "Ensino da Matemática nos Anos 90 - Uma Leitura dos Standards", in Profmat 90 - Actas, Vol. 1, Organizado por P. Abrantes & A. Silva, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, pp.11-26.
Recentemente, o documento *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* foi traduzido em Portugal numa iniciativa conjunta da Associação de Professores de Matemática e do Instituto de Inovação Educacional. Ver ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA, INSTITUTO DE INOVAÇÃO EDUCACIONAL, 1991, Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar, Tradução Portuguesa dos *Standards* do National Council of Teachers of Mathematics, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, Instituto de Inovação Educacional.
Como referência para este trabalho utilizar-se-á o texto original de *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, ou seja: NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 1989, Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Reston, Virginia, Association Drive.

(39) ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA, (Ed.), 1990, op. cit.
Esta publicação é o produto de um Seminário realizado em Vila Nova de Milfontes em Abril de 1988, onde participaram vinte e cinco professores de vários pontos do país e de vários níveis de ensino, a convite da Associação de Professores de Matemática. Resultou de um trabalho de investigação e discussão focado sobre alguns dos problemas essenciais relacionados com a renovação do currículo de matemática dos Ensinos Básico e Secundário.

(40) PUTNAM (P.), LAMPERT (M.), PETERSON (P.), 1990, op. cit., p.64.

(41) NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 1989, op. cit., p.v.

(42) Ibid, p.3.

(43) Ibid, pp.1-12. Os objectivos propostos são globalmente apresentados na *Introdução* do documento, se bem que ao longo de todo ele se encontrem referências diversas que contribuem para os clarificar.

(44) Ibid, p.6.

(45) Ibid, p.5. A expressão *poder matemático* refere-se às capacidades de um indivíduo para explorar, conjecturar, e raciocinar logicamente, bem como à sua capacidade para utilizar uma diversidade de métodos matemáticos na resolução de problemas não rotineiros. Esta noção é baseada no reconhecimento que a matemática é mais do que um conjunto de conceitos e competências a dominar; inclui métodos de investigação e raciocínio, meios de comunicação e noções de contexto. Além disso, para cada indivíduo, o *poder matemático* envolve o desenvolvimento da autoconfiança.

(46) Ibid, p.7.

(47) Ibid, p.5.

(48) Ibid, p.244.

(49) Ibid, p.75.

(50) Ibid, p.11.

(51) Ibid, p.24. Aí pode ler-se:
"Uma componente vital do ensino da resolução de problemas é deixar que os alunos formulem os seus próprios problemas".

(52) Ibid. A importância da diversidade emerge, por exemplo, a partir dos seguintes extractos:
"os alunos necessitam de trabalhar em problemas que podem levar horas, dias e até semanas a resolver (...) alguns [podem] ser resolvidos individualmente, outros devem envolver o trabalho em pequenos grupos ou mesmo toda a turma a trabalhar

em colaboração.(...) alguns problemas devem ser de resposta aberta sem resposta certa e outros devem ainda necessitar de ser formulados" (p.6).
"À medida que as crianças progridem na escolaridade devem ser confrontadas com problemas mais complexos e com maior diversidade provenientes quer do mundo real quer de contextos matemáticos" (p.23).

(53) Ibid, pp.23,24; "através de um processo de pesquisa orientada" foi a tradução adoptada para "in an inquiry-oriented manner".
(54) Ibid, p.69.
(55) ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA (Ed.), 1990, op. cit, p.38.
(56) Ibid, p.39.
(57) Ibid, p.52.
(58) Ibid, p.32.
(59) Ibid, pp.40,41.
(60) Ibid, p.58.
(61) Ibid, p.59.
(62) Ibid, p.44.
(63) Ibid, p.41.
(64) Ibid, p.44.
(65) Ibid, p.43.
(66) Ibid, p.71. As expressões em destaque estão conforme o texto original. Na *R.C.M.* é salientada a necessidade de um novo papel para o professor "quaisquer que sejam os passos dados na direcção de uma aula de matemática renovada de acordo com os princípios enunciados no texto" (p.70).
(67) SILVER (E.), 1985, "Research on Teaching Mathematical Problem Solving: Some Underrepresented Themes and Needed Direction" in Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives, E. Silver (Ed.), Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, p.256.
Cobb, Wood e Yackel, interpretando o que Silver designou por atmosfera de resolução de problemas escrevem: A prioridade do professor era estabelecer um contexto cooperativo e não avaliativo no qual as crianças podiam verbalizar e reflectir publicamente sobre as suas ideias matemáticas sem o risco de comparação social ou embaraço público.
Ver COBB (P.), WOOD (T.), YACKEL (E.), 1991, op. cit., p.168.
(68) COBB (P.), WOOD (T.), YACKEL (E.), 1991, ibid, p.158.
(69) Ibid.
(70) MEIRIEU (P.), 1990, Apprendre... Oui, Mais Comment, 5ª édition, Paris, ESF éditeur, p.64.
Este extracto, tem no original o texto seguinte:
"La situation-problème met simplement le sujet en route, l'engage dans une interaction active entre la réalité et ses projects, interaction déstabilisant et restabilisant, grâce aux décalages introduits par le formateur, ses représentations sucessives; et c'est dans cette interaction que se construit, souvent irracionnellement, la rationalité".
Para Meirieu "uma situação problema é uma situação didáctica na qual é proposta uma tarefa a um sujeito, tarefa que este não pode executar a menos que efectue uma determinada aprendizagem. Esta aprendizagem que constitui o verdadeiro objectivo da situação problema, efectua-se ultrapassando o obstáculo na realização da tarefa (ver p.190). Sobre o conceito de situação problema é ainda interessante consultar na mesma obra, pp.164-179, o "Guia metodológico para a elaboração de uma situação problema".
(71) BOUVIER (A.), 1981, op. cit., p.135.
(72) Ibid, p.138.
(73) Ibid, p.136.
(74) Ibid, pp.136,137.
(75) Ibid, p.137.
(76) Higgins, referido por BOUVIER (A.), ibid, p.138.
(77) Ver: ERNEST (P.), 1992, op. cit., pp. 289, 290.
(78) SCHOENFELD (A.), 1989, "Teaching Mathematical Thinking and Problem Solving" in Toward the Thinking Curriculum: Current Cognitive Research, Yearbook of the Association for Supervision and Curriculum Development, L. Resnick & L. Klopfer (Eds.). ASCD, pp.101,102.
(79) Expressão utilizada por Grugnetti. Ver GRUGNETTI (L.), 1989, "A Importância do Problema" in Educação e Matemática, Nº 10, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, p.5.
(80) ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA (Ed.), 1990, op. cit., p.68.

(81) Ibid, p.53.
(82) MEIRIEU (P.), 1990, op. cit., pp.92,93.
(83) SHOENFELD (A.), 1990, op. cit.
(84) Ibid.
(85) Ibid. Schoenfeld chama a atenção para que inúmeros alunos, em diversas salas de aula de matemática, 'resolvem' prontamente, através da simples combinação de dados incluídos no enunciado, vários problemas 'absurdos' que lhes são apresentados. Um exemplo típico destes problemas é o relativo à idade do capitão: "Há num barco 26 carneiros e 10 cabras. Qual é a idade do capitão?".
Stella Baruk, em 1985, publica uma obra sobre o erro em matemática intitulada, precisamente, "L' âge du Capitaine".
Ver BARUK (S.), 1985, L' Âge du Capinaine, de l'Erreur en Mathématiques, Paris, Éditions du Seuil.
Quanto a experiências de resolução de 'problemas' deste tipo, realizadas em Portugal, é interessante consultar:
COSTA (L.), 1990, "A Resolução de Problemas: Qual o Estado das Coisas?" in Educação e Matemática, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, pp. 7,8,32.
(86) KILPATRICK (J.), 1985, "A Retrospective Account of The Past 25 Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving" in Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives, Silver (Ed.), Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, p.12.
Também Silver refere que, para que haja sucesso em resolução de problemas, os professores poderão ter que alterar drasticamente o ambiente da sala de aula de matemática. Este autor indica que, "de acordo com N.S.F. Case Studies, o estudante numa sala de aula de matemática típica tem poucas oportunidades de trocar ideias, propor e resolver problemas interessantes, ou mesmo gastar tempo para pensar antes de responder a uma pergunta". Acrescenta que estes aspectos da ecologia da sala de aula não podem ser negligenciados sob pena de inibirem a capacidade de resolver problemas.
Ver SILVER (E.), op. cit., p.257.
(87) Expressão utilizada por Thompson. Ver THOMPSON (A.), 1985, "Teachers' Conceptions of Mathematics and the Teaching of Problem Solving" in Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives, E. Silver (Ed.), Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, p.287.

Conclusão da Segunda Parte

Assiste-se hoje a um novo movimento de reforma curricular em matemática em que a resolução de problemas surge, frequentemente, como devendo constituir o foco da matemática escolar.

No entanto, por vezes, parece que a expressão resolução de problemas se tornou, actualmente, uma espécie de 'slogan' que abarca diferentes perspectivas sobre o que é a Educação, quais as finalidades da Escola, o que é a matemática e porque se deve ensinar matemática em geral e resolução de problemas em particular.

No domínio da educação matemática, a propósito de problemas e noções relacionadas, fala-se em problemas não rotineiros, problemas semelhantes aos ensinados, problemas do livro de texto, problemas de fim de capítulo, problemas abertos, exercícios, problemas de palavras, problemas da vida real, problemas matemáticos, situações problemáticas, investigações, enigmas, etc.

Por vezes, torna-se difícil comparar os resultados de diversos estudos devido à falta de clareza quanto ao significado que os autores atribuem ao termo *problema*.

Partindo desta constatação esta segunda parte do estudo iniciou-se com uma reflexão sobre o conceito de problema em que procurou evidenciar-se a complexidade deste conceito e salientar o seu possível potencial em termos de actividades educativas.

Desta reflexão emerge que, embora seja difícil ou mesmo impossível e não pertinente definir de forma precisa, inequívoca e objectiva o conceito em estudo, se se pretender aprofundar o valor educativo do problema no âmbito da educação matemática, é particularmente pertinente discutir a terminologia utilizada e distinguir e caracterizar diferentes tipos de problemas.

Perante a diversidade evidenciada pelo estudo dos possíveis papéis que a resolução de problemas pode desempenhar relativamente ao currículo escolar de matemática, surge a questão de como gerir essa diversidade de modo a constituir um currículo propício à construção, por cada aluno, de uma cultura matemática de base possibilitadora de um crescimento em autonomia.

Certamente que a(s) resposta(s) a esta questão não é independente de perspectivas sustentadas acerca do que é a educação, quais as finalidades da Escola, o que é a matemática e porque se deve ensinar matemática em geral e resolução de problemas em particular.

Assim sendo, quanto se pretende reflectir sobre que papel e lugar deverá ter a resolução de problemas no currículo de matemática a questão colocada remete para novas questões:

Que problemas se considera hoje importante que os alunos devam aprender na Escola e que problemas devem ser capazes de resolver como resultado da sua aprendizagem da matemática na Escola?

Pretendem-se alunos capazes de resolver problemas para que haja mais matemáticos?

Ou pretende-se que os alunos apreciem o tipo de saber que a matemática representa e sintam como os problemas são parte intrínseca desse saber?

Ou pretende-se que os alunos apliquem de forma crítica os processos matemáticos na resolução de problemas que irão encontrar fora da Escola?

Ou pretende-se que através da educação matemática os alunos desenvolvam a sua capacidade de resolver problemas em geral?

E muitas outras questões semelhantes poderiam ser formuladas.

Os objectivos visados por estas questões podem não ser exclusivos nem incompatíveis. Mas a pertinência do ensino não pode estar separada nem ser avaliada fora de um contexto teleológico de referência. Assim, a distinção dos objectivos pretendidos pode ajudar a compreender melhor porque se deve ensinar e aprender resolução de problemas no âmbito da matemática escolar.

Se a palavra problema for compreendida de vários modos "desde a 'adivinha' que pode ser resolvida em alguns minutos até à situação problemática que será o ponto de partida para um projecto com uma duração mais ou menos longa" (1), torna-se fundamental que sejam proporcionados aos alunos ambientes de ensino diversificados onde possam individualmente e cooperativamente resolver, explorar, investigar e discutir problemas muito variados.

No entanto, nas aulas de matemática o potencial educativo dos problemas tem sido frequentemente explorado de uma forma limitada uma vez que a maior parte das questões resolvidas pelos alunos parecem ter sido, utilizando a terminologia adoptada por Abrantes e/ou Borasi (referida no primeiro capítulo desta segunda parte do trabalho), "exercícios", "problemas de palavras" ou "problemas para equacionar".

Quererá isto dizer que para muitos professores o sentido que atribuem a problema de matemática se esgota aqui?

Provavelmente, diferentes compreensões de problema e resolução de problemas estarão na base de práticas pedagógicas diversas, facilitadoras ou inibidoras do desenvolvimento do *poder matemático* dos alunos e do ensino e aprendizagem da matemática feita com gosto e prazer.

Ao reflectir-se, no segundo capítulo desta segunda parte do estudo, sobre o novo movimento de reforma curricular em matemática, evidencia-se que relativamente ao ensino a proporcionar aos alunos na sala de aula, há a preocupação de possibilitar que estes se envolvam em actividades de pesquisa, onde possam analisar situações envolvendo conceitos e relações matemáticas em potência e formular problemas cuja resolução possa clarificar essas relações e possibilitar a construção de novo conhecimento.

É de salientar a inversão que esta perspectiva representa relativamente ao ensino da matemática frequentemente existente em diversas salas de aula. De facto, em lugar de se privilegiarem competências situadas ao nível da manipulação de algoritmos, considerando-as de aprendizagem prévia aos problemas, que surgem como campo de aplicação de certas 'fórmulas', é precisamente a exploração de situações problemáticas que constitui o contexto onde emerge a necessidade de desenvolvimento dessas competências e onde o conhecimento dos alunos sobre relações e ideias matemáticas é aprofundado.

Não se trata, assim, de identificar a resolução de problemas com um conteúdo específico a ser 'somado' ao currículo de matemática. Não se trata também de a considerar uma actividade a desenvolver à margem ou em paralelo ao currículo prescrito, nem tão pouco de lhe reservar exclusivamente a função de, pontualmente, motivar os alunos para a posterior aprendizagem de determinados assuntos desse currículo. Trata-se, antes, de olhar a resolução de problemas segundo um novo prisma, perspectivando-a simultaneamente como um objectivo fundamental no âmbito da educação matemática, como um conteúdo de ensino, como uma capacidade que pode desenvolver-se e que envolve processos de pensamento complexos e como uma via educativa que, procurando ter em conta as necessidades da sociedade no seu conjunto e a natureza da matemática enquanto ciência, não negligencia também as características do aluno enquanto pessoa e sujeito que aprende (2).

Vista por este prisma a resolução de problemas, considerada no seu sentido mais amplo, parece poder considerar-se como uma experiência aberta e flexível, possibilitadora do desenvolvimento do espírito crítico e da autonomia dos alunos; parece ser uma contribuição positiva para fomentar o seu *poder matemático* e facilitar a alteração da situação de insucesso e não gosto pela aprendizagem da matemática; parece ainda ser uma forma diferente de ensinar uma matemática também diferente.

No entanto, será a realidade assim tão simples? Será esta a perspectiva segundo a qual a resolução de problemas é interpretada e levada à prática por professores reais que ensinam matemática em escolas reais e em salas de aula reais?

Torna-se, assim, pertinente, compreender junto de professores de matemática que ensinam em escolas portuguesas, qual o sentido que atribuem a resolução de problemas. Que problemas considerarão prioritário que os seus alunos sejam capazes de resolver? Que papel(éis) reservarão à resolução de problemas no âmbito do ensino e aprendizagem da matemática na Escola?

São estas questões que constituem o ponto de partida para a terceira parte deste estudo. Aí procurar-se-á compreender possíveis sentidos que os professores atribuem a problema e resolução de problemas no contexto da educação matemática.

Notas

(1)ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA, 1990, Renovação do Currículo de Matemática, 3ª edição, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, p.57.

(2) Nota: A propósito do papel da resolução de problemas no âmbito da educação matemática, Guimarães escreve:
"a resolução de problemas deve ser vista como ingrediente fundamental em educação matemática, e não como algo separado que se faz, eventualmente no final de alguns capítulos como aplicação dos assuntos matemáticos que até então foram aprendidos. Resolver problemas deve ser encarado como um objectivo de ensino, como um conteúdo a trabalhar com os alunos, como uma via educativa tendo em vista a aquisição de conhecimentos em Matemática (no seu sentido mais amplo), o desenvolvimento de capacidades necessárias ao desenvolvimento do aluno enquanto pessoa, ao estudo da Matemática e das outras ciências, a uma efectiva participação crítica e interventiva na sociedade"
Ver GUIMARÃES (H.), 1989, "Por uma Visão não Instrumentalista da Matemática" in Educação e Matemática, Nº 12, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, pp.12, 40.

Terceira Parte
O Sentido de Resolução de Problemas

Terceira Parte - O Sentido de Resolução de Problemas

Introdução à Terceira Parte

A compreensão de como concebem os professores a ciência que ensinam, bem como a natureza dos processos de ensino e aprendizagem, tem-se actualmente revelado como uma área de investigação que está a receber cada vez mais atenção por parte de diversos investigadores, nomeadamente por parte de educadores matemáticos. Neste âmbito estudam-se perspectivas, preferências e concepções dos professores sobre a natureza da matemática e do seu ensino e aprendizagem, e procuram explorar-se possíveis relações entre estas e as suas intenções pedagógicas e práticas de ensino.

No contexto destas investigações a análise de como conceptualizam os professores a resolução de problemas parece especialmente pertinente. Entre outros investigadores, Thompson, num dos trabalhos que desenvolveu, chama precisamente a atenção para que uma das maiores diferenças observadas nas práticas dos professores estudados se relacionava, precisamente, com o papel e lugar da resolução de problemas no currículo de matemática (1). E também em Portugal um estudo conduzido por Guimarães evidenciou que a expressão *problema de matemática* não foi entendida da mesma forma por todos os professores. Evidenciou ainda que, embora a resolução de problemas tenha sido encarada como um elemento potencialmente motivador para a aprendizagem da matemática, não constitui parte integrante das actividades de ensino desenvolvidas na sala de aula (2).

Nesta terceira parte do estudo, partindo da hipótese de que toda a pedagogia da matemática tem subjacente, se bem que nem sempre de uma forma muito articulada e coerente, uma filosofia da matemática (3), procurar-se-ão pesquisar e compreender perspectivas filosóficas dos professores sobre a natureza da matemática e do seu ensino.

Esta terceira parte encontra-se organizada em dois capítulos. No primeiro, indicar-se-ão e analisar-se-ão, inicialmente, algumas das noções utilizadas em estudos, desenvolvidos no âmbito da educação matemática, para referenciar e estudar como interpretam os professores a natureza da matemática e do seu ensino e aprendizagem. Em seguida, explorar-se-ão, a partir de literatura de investigação, possíveis relações entre perspectivas filosóficas particulares sobre a matemática e perspectivas de ensino, nomeadamente na área da resolução de problemas.

O segundo capítulo constitui a contribuição empírica deste estudo para a compreensão de como professores de matemática portugueses que ensinam esta disciplina ao nível do terceiro Ciclo do Ensino Básico ou Ensino Secundário, interpretam a resolução de problemas no contexto da educação matemática.

Notas

(1) THOMPSON (A.), 1985, "Teachers' Conceptions of Mathematics and the Teaching of Problem Solving" in Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives, E. Silver (Ed.), Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, p.291.
SILVER acentua igualmente que as influências das 'crenças' ("beliefs") dos professores na área da resolução de problemas parece ser um campo fértil de investigação.
Ver SILVER (A.), 1985, "Research on Teaching Mathematical Problem Solving: Some Underrepresented Themes and Needed Direction" in Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives, E. Silver (Ed.), Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, p.256.

(2) GUIMARÃES (H.), 1988, Ensinar Matemática: Concepções e Práticas, Tese Apresentada para Obtenção do Grau de Mestre em Educação, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa. Ver em especial as pp.227,253,254.
Neste estudo Guimarães indica que reconhecendo-se ou não importância aos problemas, estes raramente estão presentes na aula de matemática, tendo sido referido que "a sua utilização é frequentemente mal sucedida, não se obtendo os resultados desejados, nem sendo muitas vezes bem recebidos por muitos alunos (p.254)".
De algum modo estes resultados são consistentes com os obtidos por Franco e Teixeira que elaboraram um pequeno estudo sobre atitudes dos professores face à resolução de problemas. Ver FRANCO (A.M.) e TEIXEIRA (A.P.), 1987, Atitude dos Professores Face à Resolução de Problemas, Lisboa, Associação de Professores de Matemática.
Quanto às interpretações de *problema de matemática*, Guimarães indica que dois dos quatro professores participantes no seu estudo (Filipe e Telma) restringem os problemas de matemática a problemas para 'pôr em equação', enquanto que para os restantes dois (Paula e Julieta), os problemas pareciam revestir-se de um carácter mais amplo não visando a aplicação directa e imediata de assuntos matemáticos anteriormente 'dados'.

(3) THOM (R.), citado por LERMAN (S.), 1983, "Problem-solving or Knowledge-centred: The Influence of Philosophy on Mathematics Teaching" in International Journal of Mathematics Education in Science and Techonology, Vol. 14, No. 1, p. 60.

Capítulo I - Filosofia da matemática e ensino da matemática: Perspectivas dos professores

Nota introdutória

A tentativa de compreeender as perspectivas pessoais dos professores sobre a matemática e o seu ensino e aprendizagem tem originado vários estudos em que se utilizam diversas designações relacionadas com a origem, natureza e organização do seu conhecimento relativo a estes temas. Entre estas designações encontram-se, por exemplo, *crença* ("belief"), *sistema de crenças* ("belief system"), *concepção* e *representação.*

Neste capítulo referir-se-ão, numa primeira secção, algumas das definições e caracterizações apresentadas para *crença, sistema de crenças* e *concepção*, por alguns dos autores que utilizaram estas expressões no âmbito da investigação em educação matemática. Esta secção terminará com a análise do conceito de *representação.*

Na segunda secção e tendo presente, como o fazem notar Davis e Hersh referindo Dieudonné e Cohen (1), que, relativamente à natureza da matemática, cada pessoa pode não sustentar exclusivamente uma só perspectiva filosófica particular, pesquisar-se-ão, a partir de literatura de investigação, possíveis concepções dos professores sobre a natureza da matemática e do seu ensino e analisar-se-ão relações estabelecidas entre estes dois domínios, em particular na área da resolução de problemas.

1 - Questões terminológicas

1.1 - Crenças, sistemas de crenças e concepções

Crenças e sistemas de crenças: Scheffler, referido por Thompson (2), indica que uma *crença* é um estado 'teórico' ("theoretical") que caracteriza, de formas subtis, a orientação da pessoa no mundo. As crenças relativas a um dado objecto ou situação não existem no indivíduo de forma isolada. Organizam-se em *sistemas de crenças*. Para Rokeach, igualmente referido por aquela autora (2), estes sistemas consistem em todas as crenças, expectativas ou hipóteses conscientes e inconscientes que a pessoa, num dado momento, aceita como verdade para o mundo em que vive. Para Thompson, a noção de sistema de crenças constitui "uma metáfora para examinar e descrever como estão organizadas as crenças de um indivíduo" (3).

Thompson (4) refere que, apesar da actual popularidade das crenças dos professores como área de estudo, muitas das investigações utilizaram a noção de crença mais ou menos livremente, e aponta como uma das possíveis razões para tal facto a dificuldade de distinguir crença de conhecimento. Embora esta distinção tenha sido feita por alguns autores referindo que, enquanto as crenças podem ser mais ou menos consensuais e sustentadas com vários graus de convicção, o conhecimento seria caracterizado de acordo com uma perspectiva epistemológica tradicional por haver acordo geral acerca dos procedimentos para avaliar a sua validade, esta autora chama a atenção para o facto de, actualmente, ser aceite na filosofia das ciências que a avaliação do que é conhecimento depende das teorias consideradas. Assim, o que numa época é legitimamente sustentado como conhecimento pode, mais tarde, à luz de novas teorias, ser declarado uma crença, e inversamente.

Deste modo, parece não ser relevante, nem haver necessidade de diferenciar como inconciliáveis, as crenças do conhecimento. Como refere Ponte, "podemos ver as crenças como uma parte do conhecimento relativamente 'pouco elaborada'" (5), em vez de ver estes dois domínios como disjuntos. Segundo o mesmo autor, "nas crenças predominaria a elaboração mais ou menos fantasista e a falta de confrontação com a realidade empírica. No conhecimento mais elaborado de natureza prática predominariam os aspectos experienciais. No conhecimento de natureza teórica predominaria a argumentação racional" (6).

Para Thompson os *sistemas de crenças* não são estáticos, mas antes fluidos ou dinâmicos. Seguindo Green, esta autora refere a existência, nestes sistemas, de três dimensões que se prendem com a forma como as crenças se relacionam entre si (7).

A primeira dimensão diz respeito à constatação de que uma crença nunca é sustentada em total independência de todas as outras. Os sistemas de crenças têm uma estrutura quasi-lógica, havendo crenças primárias e crenças derivadas. Por exemplo, se um professor acreditar primeiramente que a sua função seja a de fornecer aos alunos toda a informação necessária à resolução, na sala de aula, de todas as tarefas matemáticas que lhes são propostas, é provável que acredite também, como consequência, que importa que os enunciados dos problemas que apresenta aos alunos contenham todos os dados de que estes necessitam para poder obter a solução.

A segunda dimensão prende-se com "o grau de convicção com que se sustentam as crenças ou com a sua *força psicológica*" (8). Num sistema de crenças, de acordo com Green, estas podem ser mais centrais - as mais fortemente sustentadas, ou mais periféricas - as mais susceptíveis de exame e mudança. Segundo este autor, pode acontecer que uma crença seja derivada do ponto de vista lógico mas psicologicamente central, ou logicamente central e psicologicamente periférica.

Finalmente, para Green, as crenças organizam-se e são sustentadas em agrupamentos ("clusters"), encontrando-se mais ou menos isoladas e protegidas de relações com outros agrupamentos de crenças. Assim sendo, esta dimensão torna possível, segundo Thompson (8), possuir conjuntos de crenças conflituais, e pode ajudar a explicar algumas das inconsistências encontradas em crenças dos professores.

Considerar as três dimensões propostas por Green relativamente aos sistemas de crenças conduz a salientar o esforço, particularmente difícil, de compreender, relativamente a cada professor de matemática, qual o agrupamento central das suas crenças relativas à natureza desta ciência e do seu ensino e aprendizagem na Escola. Adaptando o que Ponte escreveu relativamente ao estudo das concepções, poder-se-á dizer que o estudo das crenças dos professores de matemática, concebidas de acordo com o modelo proposto por Green, se depara com "sérios problemas metodológicos (...) exige uma abordagem especialmente imaginativa" (9).

No âmbito da matemática, Schoenfeld refere-se aos *sistemas de crenças matemáticas* ("mathematical belief systems") como sendo uma visão individual matemática do mundo, ou seja, "a perspectiva com a qual se aborda a matemática e as tarefas matemáticas" (10).

Raymond, Santos e Masingila (11), referem que diversos educadores matemáticos definem estes sistemas mais especificamente, incluindo aí o conhecimento subjectivo que alguém tem acerca de si próprio, da matemática, do meio ambiente e das tarefas matemáticas. Estas autoras, num estudo conduzido por elas próprias sobre as crenças dos professores acerca da matemática e da pedagogia da matemática, consideram os sistemas de crenças em termos de crenças acerca de si próprio, crenças epistemológicas, crenças ontológicas e crenças éticas. Salientam ainda que cada indivíduo tem o seu próprio sistema de crenças, que influencia a interiorização das suas experiências através de um processo de filtragem que é único na cultura em que esse indivíduo vive. Segundo as autoras, para cada indivíduo a codificação das representações das suas experiências no mundo faz-se, assim, de acordo com o seu sistema de crenças.

<u>O conceito de concepção</u>: Associada à noção de *sistema de crenças* aparece a noção de *concepção*. Thompson, em 1985, descreve as concepções ou sistemas conceptuais como organizações complexas de crenças, 'não crenças' ("disbeliefs") e conceitos num dado domínio, indicando que, funcionalmente, os sistemas conceptuais "actuam como filtros através dos quais a informação é processada e interpretada" (12).

Posteriormente, em 1992, esta autora salienta que lhe parece mais útil falar em *concepções dos professores* em lugar de, simplesmente, *crenças dos professores*, e conceptualizar as investigações de acordo com aquele conceito. Refere ainda que considera as concepções como uma estrutura mental mais geral que abarca simultaneamente crenças, significados, conceitos, proposições, regras, imagens mentais e preferências (13).

Considerando trabalhos realizados no contexto português, Guimarães, na investigação que desenvolveu, indica que "podemos definir compreensivamente concepção ou sistema conceptual do professor, como um esquema teórico, mais ou menos consciente, mais ou menos explícito, mais ou menos consistente, que o professor possui, que lhe permite interpretar o que se lhe apresenta ao seu espírito e que de alguma maneira o predispõe, e influencia a sua acção, em relação a isso" (14). Ponte, por seu lado, refere que as concepções constituem "quadros conceptuais que desempenham um papel semelhante ao dos pressupostos teóricos gerais dos cientistas" (15).

Segundo J. F. Matos, a "ideia de concepção entronca numa ideia mais geral - a de *representação*" (16). Este conceito é oriundo de investigações desenvolvidas no âmbito da psicologia social.

1.2 - <u>Conceito de representação</u>

No campo sociológico, ao termo *representação* associa-se, frequentemente, o adjectivo *social*. Embora a *representação social* seja um conceito obtido a partir do de *representação colectiva* proposto por Durkheim, actualmente há consenso entre diversos investigadores que "o que permite qualificar como sociais as representações, são menos os seus suportes individuais ou grupais do que o facto de elas serem elaboradas no decurso de processos de trocas e interacções" (17).

Relativamente à génese do conceito de representação no âmbito da sociologia, embora Weber "faça das representações um quadro de referência e um vector da acção dos indivíduos" (18), pode-se dizer que o verdadeiro inventor deste conceito foi Durkheim, na medida em que lhe fixa os contornos e lhe reconhece o direito de explicar os mais variados fenómenos na sociedade.

Para Durkheim, a representação designa, prioritariamente, "uma vasta classe de formas mentais (ciências, religiões, mitos, espaço, tempo), de opiniões e de saberes sem distinção. A noção é equivalente à de ideia ou sistema não sendo especificadas as suas características cognitivas" (19). Este sociólogo distinguiu as representações individuais das representações colectivas, referindo que enquanto as primeiras são efémeras e têm por substracto a consciência individual, as segundas são mais estáveis, têm por substracto a sociedade no seu conjunto, são partilhadas por todos os membros de um grupo e têm por função preservar as relações entre eles e prepará-los para pensar e agir de uma maneira uniforme.

Posteriormente, o conceito 'durkheimiano' de representação colectiva foi retomado por Moscovici, que questiona a oposição entre o individual e o colectivo e que introduz em sua substituição o conceito de *representação social*. Este autor contribuiu de uma forma decisiva para mostrar que as representações são dinâmicas e não estáticas, simultaneamente geradas e adquiridas, e constantemente elaboradas através de interacções sociais e processos de interiorização. Contribuiu ainda para evidenciar que as representações comuns, que se julgavam pertinentes para compreender e explicar as evoluções colectivas, aparecem também como cruciais quando se trata de compreender a história pessoal (20).

Segundo Abric, designa-se por representação "o produto e o processo de uma actividade mental pela qual um indivíduo, ou um grupo, reconstitui o real com que é confrontado atribuindo-lhe uma significação específica" (21). Assim, para este autor, a representação é um conjunto organizado de opiniões, atitudes, crenças e informações referentes a um objeto ou uma situação, que cada sujeito constrói tendo em conta aquilo que ele próprio é (a sua história, o já vivido), o sistema social e ideológico no qual está inserido e a natureza das ligações que estabelece com o sistema social.

É interessante verificar a proximidade que o conceito de representação, assim definido, apresenta relativamente à caracterização de concepção apresentada, por exemplo, por Thompson. Com efeito, e tal como acontecia com as concepções, as representações sendo uma grelha de leitura e descodificação da realidade, agem como "filtros interpretativos" (22) que permitem a interpretação e avaliação prévias de uma situação. As representações possibilitam, portanto, a antecipação dos actos e das condutas quer de si próprio quer dos outros.

Estruturalmente, e de acordo com diversos autores, toda a representação se constitui em torno de um nó central, "uma estrutura que organiza os elementos da representação e lhes dá sentido" (23) e que é constituído pelos seus elementos mais estáveis. É no nó central que, segundo J.F. Matos, se podem "situar as concepções fundamentais acerca da matemática" (24). Para lá destes elementos, a representação inclui ainda na sua estrutura elementos periféricos que constituem uma "zona tampão" (25) que absorve os desacordos entre a representação e uma realidade que a põe em causa, assegurando, assim, a sua estabilidade relativa.

O nó central tem, simultaneamente, uma função geradora, pela qual se cria ou transforma a significação dos outros elementos constituintes da representação, e uma função organizadora que determina a natureza das ligações que unem entre si os vários elementos. Este nó forma-se, por um lado, a partir da natureza do objecto que é representado, e por outro, a partir da relação que o sujeito estabelece com esse objecto (26).

Ilustrando a aplicação deste modelo da estrutura das representações relativamente à matemática, J. F. Matos indica que uma concepção frequente entre os alunos é "a ideia de que o pensamento matemático é ser capaz de aprender, recordar e aplicar regras, fórmulas e procedimentos. Em torno desta concepção surgem concepções mais periféricas como por exemplo a ideia de que os problemas de matemática são resolúveis num espaço de tempo razoavelmente curto" (27).

O estudo das representações que se desencadeou inicialmente no domínio da psicologia social, estendeu-se posteriormente à psicologia cognitiva e a outros domínios. No entanto, ao pretender analisar-se este conceito nos seus vários campos de aplicação, uma das primeiras constatações que se faz é a falta de clareza com que, por vezes, ele é usado nalguns estudos, bem como a diversidade de utilizações que lhe está associada. Com efeito, o termo *representação* comporta uma grande multiplicidade de significados consoante a sua abordagem é feita segundo uma perspectiva sociológica, psicológica, epistemológica, educativa, ou se foca na importância que o conceito poderá ter nos processos de construção do conhecimento (28).

Denis (29) salienta que, apesar das variantes da noção de representação e embora esta noção tenha a sua especificidade própria em cada sector disciplinar, há possibilidades de encontrar um nó semântico comum: a ideia de que as representações são entidades cognitivas, em certa medida permanentes, susceptíveis de conhecer actualizações transitórias e modificações mais ou menos duráveis, e cuja propriedade geral é a de serem a base do funcionamento das condutas.

No entanto, tendo em conta as investigações desenvolvidas no âmbito das ciências sociais, que contribuíram de uma forma importante para destacar que às representações "estão ligados valores e que estes valores são factores determinantes das condutas" (30), poder-se-á dizer que o conteúdo das representações e, nomeadamente, das representações sobre matemática, não se esgota no domínio cognitivo.

De facto, como De Ketelle salienta, as representações são "sínteses mentais de informações, mais ou menos carregadas afectivamente, que a pessoa constrói, mais ou menos conscientemente, a partir do que ela própria é, do que foi e do que projecta e guia o seu comportamento" (31). De igual modo, para Andrade, a representação não é exclusivamente de natureza cognitiva, nem mesmo um elemento cognitivo investido de uma carga afectiva, mas um elemento intrinsecamente das duas espécies, sendo os elementos representativos a essência constituinte da identidade da pessoa (32).

Em síntese, e tendo em conta tudo o que anteriormente foi referido, torna-se pertinente conceber as representações como entidades intrinsecamente cognitivas e afectivas. Torna-se também pertinente considerá-las enquanto processos e produtos do psiquismo humano e olhá-las, simultaneamente, como um instrumento de cognição, de socialização e de comunicação.

Além disso, considerando o professor na sua globalidade enquanto ser social, ser profissional e sistema-pessoa, parece, ainda, tornar-se pertinente considerar o conceito de representação adequado ao estudo e compreensão de como conceptualizam os professores de matemática a natureza desta ciência e do seu ensino, em particular, na área da resolução de problemas.

De facto, as representações construídas por cada professor, ou seja as suas *representações pessoais* (33), sendo modelos interiorizados do ambiente do sujeito e das suas acções nesse ambiente, constituem fontes de informação sobre o mundo que influenciam, em cada pessoa, o processo pelo qual se vai desenrolar a selecção, interpretação e integração da realidade na organização do conhecimento. Assim, desempenham um importante papel tanto na compreensão dos processos de elaboração individual dos saberes, como na compreensão das condições necessárias para que cada pessoa encontre sentido nas propostas educativas que lhe são feitas.

Tendo em conta os objectivos da presente investigação, considerou-se pertinente aprofundar o conhecimento de resultados de investigação relativos ao estudo de crenças e concepções dos professores sobre a matemática e o seu ensino, bem como explorar possíveis relações entre perspectivas filosóficas sobre a matemática e perspectivas de ensino relacionadas, nomeadamente, com a resolução de problemas.

É sobre esta temática que incide a segunda secção deste capítulo.

2 - Relações entre perspectivas filosóficas sobre a matemática e perspectivas de ensino

2.1 - Concepções dos professores sobre a matemática

Thompson, numa síntese da investigação sobre concepções e crenças dos professores elaborada com base quer em investigações empíricas, quer em estudos de natureza teórica, destacou algumas das possíveis concepções sobre a matemática a partir de trabalhos desenvolvidos por Skemp, Copes, Lerman e Ernest (34).

Skemp refere que acentuadas diferenças nas ênfases e abordagens de ensino da matemática podem estar relacionadas com duas concepções distintas sobre o que constitui esta ciência. Por seu lado, estas concepções estão associadas a duas possíveis interpretações do que significa compreender matemática. Segundo este autor pode distinguir-se a *compreensão instrumental*, isto é, o conhecimento de "regras sem razões", da *comprensão relacional*, ou seja, o "saber simultaneamente o que fazer e porque fazer" (35).

Skemp propõe uma distinção correspondente entre o que designa por *matemática instrumental* e *matemática relacional*. O conhecimento instrumental da matemática é o conhecimento de um conjunto de 'planos fixos' para realizar tarefas matemáticas. Estes planos prescrevem passo a passo os procedimentos a seguir, bem como a sua sequência. O conhecimento relacional é caracterizado pelo facto de possibilitar, a quem o possui, a capacidade de construir diversos planos para abordar e realizar uma multiplicidade de acontecimentos e tarefas.

Esta distinção evidencia, como o próprio Skemp faz questão de salientar, que diferentes professores de matemática <u>podem não estar todos a ensinar 'a mesma matemática'</u>. Assim, o que está em causa não é um ensino melhor ou pior da mesma espécie de matemática, mas antes o ensino e aprendizagem de duas matérias efectivamente diferentes que poderão estar a ser designadas pelo mesmo nome, 'matemática'.

Copes, a exemplo de diversos outros investigadores, usou o esquema de Perry, relativo ao desenvolvimento intelectual e ético, para caracterizar as concepções dos professores sobre a matemática. Condensou esse esquema em quatro categorias e destacou, assim, quatro tipos de concepções: *absolutismo*, *multiplismo* ("multiplism"), *relativismo* e *dinamismo* (36).

Jones (37), referindo-se igualmente aos estudos desenvolvidos por Copes com base no esquema de Perry, usa para as concepções designadas por *absolutismo* e *dinamismo* respectivamente os termos *dualismo* e *compromisso* ("commitment").

Segundo uma perspectica *absolutista* ou *dualista* da matemática, todo o problema tem uma solução, constituindo esta ciência uma colecção de factos ou métodos correctos cuja verdade é estabelecida pela autoridade. Ernest indica que, de acordo com esta perspectiva, "fazer matemática é seguir regras" (38).

Pode acontecer um movimento no sentido do *multiplismo* quando uma pessoa começa a ver, e reconhecer, que há frequentemente uma pluralidade de 'respostas' igualmente válidas, considerando que a opção por uma ou outra depende, fundamentalmente, de questões de preferência pessoal.

Um sujeito com uma perspectiva *relativista* do mundo reorganiza o seu conhecimento tendo subjacente que todo o saber é contextual e relativo. No âmbito da matemática reconhece múltiplas respostas e abordagens para os problemas, considerando que a sua avaliação depende do sistema matemático ou referencial adoptado.

Para Jones, quando uma pessoa relativista sente necessidade de abrandar o desconforto provocado pelo facto de não ter a 'melhor' escolha (por exemplo, para a abordar o ensino e a aprendizagem), move-se para uma posição mais estável, para uma posição de *compromisso*, que lhe possibilita tomar opções fundamentadas. Embora esta posição possa ter algumas semelhanças com o dualismo há, para este autor, uma grande diferença entre ambas: o que legitima o conhecimento na posição de compromisso não é a arbitrariedade ou uma autoridade externa, mas antes critérios pessoais que tornam a actividade de conhecer, interpretar e encontrar sentido "intensamente pessoal e dinâmica" (39).

Lerman, apoiando-se na filosofia da matemática, identifica duas perspectivas alternativas sobre a natureza da matemática a que Thompson se refere como concepções *absolutistas* e *falibilistas*. Estas perspectivas, que adiante serão analisadas mais detalhadamente, decorrem de duas escolas de pensamento sobre filosofia da matemática, respectivamente o programa euclidiano (uma tentativa para dotar a matemática de fundamentos firmes) e o programa quasi-empiricista no sentido de Lakatos (40).

Ernest (41), por seu lado, distingue três concepções sobre a matemática evidenciadas quer a partir da filosofia da matemática quer a partir de investigações respeitantes ao ensino, e que caracteriza como se segue:

• Perspectiva instrumentalista: a matemática é considerada como uma reunião de factos, regras e competências destinadas a ser utilizadas na prossecução de alguma finalidade externa; "a matemática é um conjunto de regras e factos não relacionados, mas utilitários" (42). Se se utilizar o esquema de Perry, esta perspectiva corresponde a uma perspectiva dualista da matemática;

• Perspectiva platonista: a matemática é um corpo de conhecimento estático e unificado que se descobre, não se cria;

• Perspectiva da matemática como resolução de problemas ("problem solving view"): a matemática é um processo de pesquisa e não um produto acabado, cujos resultados permanecem abertos a revisão; constitui um campo de criação e invenção humanas, um produto cultural que está continuamente em expansão.

Ernest refere que pode conjecturar-se que estas três perspectivas sobre a matemática formam uma hierarquia. No nível mais baixo estaria o instrumentalismo. No nível seguinte situar-se-ia o platonismo que envolve, já, a compreensão global da matemática como uma estrutura consistente, objectiva e interligada. No nível mais elevado encontrar-se-ia a perspectiva da matemática como resolução de problemas.

As designações utilizadas por Skemp, Lerman e Ernest para referenciar as concepções dos professores sobre a matemática, são relacionadas por Thompson de acordo com o Quadro III:

Skemp	Ernest	Lerman
Matemática instrumental	Perspectiva instrumentalista	
Matemática relacional	Perspectiva platonista	Pespectiva absolutista
	Matemática como resolução de problemas	Perspectiva falibilista

Quadro III

Thompson indica que a matemática relacional de Skemp pode ser vista como análoga à perspectiva platonista de Ernest, embora não esteja necessariamente em conflito com a descrição da matemática como resolução de problemas proposta por este autor.

Um dos factos dignos de nota que Thompson retira dos estudos focados nas concepções dos professores sobre a matemática é que, embora tenham sido encontradas entre os professores diversas concepções sobre a natureza desta ciência, em cada indivíduo as crenças sobre a matemática são em geral consistentes.

Entre as investigações realizadas em Portugal sobre concepções dos professores de matemática relativas a esta disciplina e ao seu ensino, destaca-se a de Guimarães, realizada junto de quatro professores do ensino secundário com experiência de ensino. Este autor refere que os professores estudados, relativamente à natureza da matemática, parecem aderir a uma concepção do tipo realista, considerando que os entes matemáticos são realidades objectivas, mais descobertas do que inventadas e cuja existência é, em certa medida, independente e exterior ao homem (43).

Tendo em conta quer a síntese da investigação efectuada por Thompson, quer o estudo conduzido por Guimarães, quer revisões de literatura sobre a problemática das concepções dos professores sobre a matemática, efectuadas, entre outros autores, por Jones e por Ponte, quer ainda diversos outros estudos consultados (44), há duas vertentes, que parecem estar interligadas, que importa salientar.

A primeira prende-se com a constatação de que, para muitos professores, a matemática restringe-se à matemática escolar. Por exemplo, Thompson, referindo-se a professores participantes em estudos desenvolvidos nos Estados Unidos acentua que poucos têm uma perspectiva histórica e filosófica fundamentada da matemática (45). Em Portugal, Guimarães constatou que, embora, espontaneamente a matemática tenha sido caracterizada por atributos de carácter lógico, entre os quais a exactidão, o rigor e a dedução, quando se tentou aprofundar estes aspectos os professores, em geral, sentiram-se pouco à vontade, evidenciando-se que reflectir sobre a matéria que se ensina "é algo que parece estar ausente das preocupações habituais dos professores" (46).

Para Ponte não se notam grandes contradições entre os resultados obtidos pela investigação realizada em Portugal, e a de outros países, relativamente à problemática em estudo. Este autor destaca, contudo, a dificuldade sentida pelos professores em falar sobre matemática, e a restrição que tendem a fazer da matemática à sua dimensão de disciplina escolar (47).

A segunda vertente a salientar relaciona-se com a preponderância de perspectivas instrumentalistas e platonistas sobre a matemática, se se utilizar o esquema de designações proposto por Ernest, ou de perspectivas absolutistas se se seguir a terminologia de Lerman. A matemática é, frequentemente, considerada como um conjunto de factos, regras e teoremas, muitas vezes não relacionados, havendo tendência para valorizar a certeza e previsibilidade de procedimentos, e existindo, por vezes, desconforto perante tópicos matemáticos para os quais não há a garantia da melhor resposta, da melhor maneira de proceder ou da melhor maneira de pensar.

Tal constatação não significa, contudo, a inexistência de professores com uma perspectiva mais dinâmica da matemática. De facto há professores, destacados da maioria, para quem a matemática é um campo de conhecimentos, sujeitos a revisão, continuamente criado e recriado pelo homem e em que as actividades de produção matemática são conduzidas por problemas oriundos de diversas áreas e contextos.

Após terem sido observados alguns dos resultados de investigações respeitantes ao estudo de concepções dos professores sobre a matemática, uma questão que fica é a de se será possível estabelecer relações entre perspectivas filosóficas particulares e perspectivas de ensino, em particular na área da resolução de problemas. Procure-se observar, mais de perto, a possível existência e natureza destas relações.

2.2 - Relações entre filosofias pessoais sobre a matemática e interpretações de resolução de problemas

Relações entre concepções sobre a matemática e perspectivas de ensino: Para a maioria dos professores, "as concepções sobre o ensino e aprendizagem tendem a ser colecções ecléticas de crenças e perspectivas que parecem constituir mais o resultado dos seus anos de experiência na sala de aula do que o resultado de qualquer outro tipo de estudo formal ou informal" (48). A maior parte dessas concepções foi formada durante os seus anos de escolarização e foi modeladas pelas suas experiências enquanto alunos de matemática.

A natureza eclética das concepções dos professores sobre o ensino da matemática torna improvável que as concepções de um professor se ajustem a modelos de ensino previamente caracterizados. No entanto, a análise de possíveis modelos de ensino pode ajudar a compreender as concepções dos professores sobre o ensino. Assim, a reflexão sobre relações entre filosofia da matemática e ensino da matemática iniciar-se-á começando por analisar alguns daqueles modelos no âmbito do ensino da matemática.

Para Thompson, os autores Kuhs e Ball, baseando-se numa revisão da literatura em educação matemática, formação de professores, filosofia da matemática, filosofia da educação e investigação em ensino e aprendizagem, identificaram "pelo menos quatro perspectivas dominantes e distintas acerca de como a matemática deve ser ensinada" (49). Estas perspectivas que constituem, segundo Thompson, um conhecimento consensual de base relativamente aos modelos de ensino, podem ser brevemente descritos como se segue:

• Perspectivas focadas em quem aprende: aqui o foco é a construção pessoal do conhecimento matemático;

• Perspectivas focadas no conteúdo com ênfase na compreensão conceptual: o ensino é conduzido pelo próprio conteúdo matemático mas colocando-se a ênfase na compreensão conceptual;

• Perspectivas focadas no conteúdo com ênfase no desempenho: o foco do ensino continua a ser o conteúdo matemático, mas a ênfase é posta na execução e domínio de regras e procedimentos matemáticos;

• Perspectivas focadas na sala de aula: a actividade na sala de aula deve ser bem estruturada e eficientemente organizada de acordo com comportamentos eficazes dos professores identificados em investigações processo-produto sobre a eficácia do ensino (50).

Thompson refere que cada uma das três primeiras perspectivas sobre o ensino da matemática será a mais "provavelmente defendida" (51) e aquela que "resultará naturalmente" (51) de cada uma das concepções sobre a natureza da matemática consideradas por Ernest. As relações estabelecidas por Thompson entre as perspectivas sobre a matemática indicadas por esse autor e as perspectivas de ensino, identificadas por Kuhs e Ball, são apresentadas no Quadro IV.

Concepções sobre a matemática (Ernest)	**Perspectivas de ensino (Kuhs e Ball)**	
	Designação	Descrição
Instrumenta-lista	Perspectivas focadas no conteúdo com ênfase no desempenho	• Foco do ensino: conteúdo matemático organizado de acordo com uma hierarquia de competências e conceitos. • Alguns aspectos centrais: (a) Todo o comportamento matemático é governado por regras; os processos de cálculo devem ser automatizados; saber matemática é ser capaz de dar respostas e resolver problemas usando regras já aprendidas; não é necessário compreender o porquê dos erros dos alunos, pois o ensino futuro acabará por corrigi-los; (b) o professor deve demonstrar, explicar e definir a matéria apresentando-a através de um ensino expositivo; cabe ao aluno o papel de ouvir, responder a questões e resolver exercícios ou problemas usando procedimentos modelados pelo professor ou pelo livro de texto
Platonista	Perspectivas focadas no conteúdo com ênfase na compreensão conceptual	• Foco do ensino: conteúdo matemático, organizado essencialmente a partir da estrutura da matemática. • Alguns dos aspectos centrais: (a) A ênfase é colocada no aumento da compreensão, pelos alunos, de ideias e procedimentos; (b) há uma influência dual do conteúdo e de quem aprende: por um lado o conteúdo é central, por outro, considera-se que o conhecimento é construído pelo indivíduo.
A matemática como resolução de problemas	Perspectivas focadas em quem aprende ("learner-focused")	• Foco do ensino: os interesses e ideias dos alunos são fundamentais no estabelecimento do currículo, considerando-se essencial que os alunos se envolvam activamente de modo a fazer matemática - a explorar e formalizar ideias matemáticas. • Alguns dos aspectos centrais: (a) Subjacente está uma perspectiva construtivista da aprendizagem da matemática; (b) o professor é considerado facilitador da aprendizagem dos alunos; deve colocar questões e situações interessantes para investigação, desafiar os alunos a pensar e ajudá-los a ultrapassar lacunas nas suas próprias ideias.

Quadro IV

O Quadro IV permite evidenciar que embora possa haver inconsistências entre o que os professores dizem e o que praticam, para Thompson as concepções de cada professor sobre a matemática influenciam, de facto, o seu ensino, se bem que aquelas concepções não se relacionem de uma maneira simples e directa com as decisões e comportamentos de ensino.

Esta constatação levanta, assim, a questão de como é que as perspectivas filosóficas sustentadas pelos professores sobre a matemática e o seu ensino interagem com a interpretação que concedem a sugestões acerca do ensino, provenientes de colegas, formadores de professores ou de orientações curriculares. Em particular, que influências terão as perspectivas filosóficas sustentadas pelos professores relativamente à matemática no sentido que estes atribuem a *resolução de problemas* no âmbito da matemática escolar?

Examinem-se um pouco mais de perto estas influências a partir de trabalhos elaborados por Lerman e Ernest.

Relações estabelecidas por Lerman entre filosofia da matemática e resolução de problemas

Lerman, num artigo intitulado *Problem-Solving or Knowledge-Centred: The Influence of Philosophy on Mathematics Teaching* sugere que "a perspectiva de alguém sobre o ensino da matemática é uma consequência lógica do seu compromisso epistemológico relativamente ao conhecimento matemático" (52).

Este autor analisa as escolas de pensamento sobre filosofia da matemática e considera que há aí dois movimentos distintos e logicamente opostos que emergem: o *programa euclidiano* e o programa *quasi-empiricista.* Segundo Lerman, cada um destes movimentos "transporta consigo uma metodologia específica que também determina a perspectiva de ensino" (53). Refere, portanto, que "como consequência podem identificar-se duas perspectivas de ensino" (54) que designa respectivamente por *matemática como corpo de conhecimento* e *matemática através da resolução de problemas* e relaciona estas perspectivas com os movimentos anteriormente indicados.

Assim, para este autor, "a adopção de uma abordagem euclidiana implica a tendência para olhar o ensino da matemática como uma forma de mostrar aos alunos a natureza dedutiva desta ciência" (55). A matemática é considerada como um corpo fixo de conhecimento acumulado, linear ou hierárquico, seguro, fiável e isento de valores, considerando-se que os conceitos são descobertos e não desenvolvidos. Assim, são os métodos correctos de dedução que têm importância central e devem ser aprendidos em primeiro lugar. Se se possibilitar aos alunos que aprendam e testem estes métodos através de exercícios repetidos, então a matemática será conhecida por eles com sucesso.

Uma vez que a ênfase é colocada nos métodos, estes devem ser aprendidos em primeiro lugar, deixando-se para depois a compreensão das suas utilizações, aplicações ou relevância. Neste sentido, não há um objectivo particular para que um problema seja resolvido.

Segundo Lerman, o estilo de ensino vai, essencialmente, no sentido de "uma visão esotérica da matemática" (56). Se um aluno perguntar ao professor, que adopta uma abordagem euclidiana, a razão para estudar um determinado conteúdo matemático, provavelmente a resposta desse professor será: (a) porque está no programa, (b) verás mais tarde o seu valor quando perceberes a sua ligação com o resto da matemática, (c) é usado de diversas maneiras, pergunta-me mais tarde e dar-te-ei um exemplo, (d) porque eu o digo, etc. Lerman salienta que agindo deste modo o professor está a comunicar que o papel da matemática escolar não é preocupar-se com a aplicação de conceitos matemáticos. Impede, assim, que os alunos vejam que estes conceitos se desenvolveram, não por acaso, mas como resposta a problemas não resolvidos.

Aceitar a perspectiva alternativa sobre a natureza da matemática, ou seja, adoptar o programa quasi-empiricista, conduz, segundo Lerman, a adoptar uma "metodologia de ensino" (57) da matemática "radicalmente diferente" (57) da apresentada anteriormente e que este autor designa por *matemática através da resolução de problemas.*

Lerman ilustra esta metodologia recorrendo, em particular, ao seguinte exemplo apresentado por Alan Bishop: Foi pedido a uma turma de alunos uma fracção entre 1/2 e 3/4 e um aluno respondeu 2/3. Como justificação explicou que 2 estava entre 1 e 3 (os numeradores) e 3 entre 2 e 4 (os denominadores). O professor pode responder que esta justificação só serve para este caso particular e pedir a outro aluno o método 'correcto'. Uma reacção alternativa do professor que reflecte, segundo Lerman, a natureza da matemática como resolução de problemas (58) é encorajar o aluno a testar essa ideia com outros exemplos. Aos colegas podem ser pedidos possíveis contra exemplos. Ao aluno pode pedir-se para tentar prolongar o método de modo a que possa abarcar outros casos como, por exemplo, encontrar uma fracção entre 1/3 e 1/2, e assim por diante.

Assim, para Lerman, quando um professor ensina matemática através da resolução de problemas o método básico será o da procura de soluções para problemas novos, devendo os alunos ser encorajados a propor ideias, colocar hipóteses, sugerir métodos, testar as suas hipóteses e tentar generalizar os próprios métodos. Segundo o mesmo autor, deste modo os conceitos matemáticos aparecerão aos olhos dos alunos como relevantes para os problemas a resolver, em lugar desta relevância ter que ser procurada pelo professor quando eles lhe solicitam justificações para a inclusão no currículo deste ou daquele conceito matemático.

<u>Relações estabelecidas por Ernest entre filosofias pessoais sobre a matemática e resolução de problemas</u>

Num trabalho intitulado *Problem Solving: Its Assimilation to the Teacher's Perspective* Ernest apresenta um teoria baseada na hipótese de que "a *filosofia pessoal* do professor sobre a matemática é a <u>maior determinante</u> do que o professor entende por resolução de problemas relativamente à matemática escolar" (59). Nas suas palavras é esta filosofia, ou seja, a "concepção do professor sobre a natureza da matemática como disciplina" (60), que "<u>determina</u> a compreensão do professor sobre a natureza da resolução de problemas" (61).

Este investigador estabelece a referida conjectura começando por salientar que as três principais filosofias da matemática sustentadas, embora de uma forma implícita ou desarticulada, pelos professores de matemática são, o que designa por *absolutismo*, *absolutismo progressista* e *falibilismo*. Em seguida faz corresponder a cada uma destas três filosofias, três diferentes interpretações de resolução de problemas (62).

O Quadro V apresenta as correspondências estabelecidas por Ernest bem como uma caracterização quer das filosofias pessoais sobre a matemática indicadas por este autor quer das correspondentes interpretações para resolução de problemas.

Principais sobre mat.	**filosofias pessoais sustentadas por professores**	**Interpretações de resolução de problemas**
Designação	Descrição	
Absolutista	A matemática é um corpo de conhecimento objectivo, fixo, certo, neutro, isento de valores e cuja estrutura é hierárquica.	A resolução de problemas consiste na "execução de tarefas não rotineiras e com resposta certa, impostas pelo professor. Assim, a resolucão de problemas será a actividade que se seguirá à transmissão de conteúdos matemáticos e que possibilita os meios de aplicar conhecimentos e competências anteriormente aprendidas" (63). O principal papel do professor é comunicar e transmitir conhecimentos, sendo os problemas considerados meios secundários de aplicar, reforçar e motivar a aprendizagem.
Absolutista Progressista	A matemática é constituída por conhecimento certo e objectivo, mas há conhecimento matemático novo que está constantemente a ser criado pelo homem. Não é questionada a certeza do conhecimento matemático, mas é reconhecido o papel criador da actividade humana.	A resolução de problemas é "um meio de desenvolver e utilizar as estratégias e os processos matemáticos bem como um meio de descobrir as verdades e estruturas da matemática" (64). Os alunos experimentarão e explorarão ambientes e contextos cuidadosamente escolhidos e planificados, sendo guiados pelo professor na resolução dos problemas, implícita ou explicitamente, contidos nesses ambientes; espera-se que o conhecimento surja da experiência dos alunos tendo o professor o papel de condutor e facilitador.
Falibilista	O falibilismo é a filosofia da matemática "largamente devida a Lakatos mas também partilhada por Davis, Hersh e Tymoczko" (65). Considera que os conceitos e proposições matemáticas bem como a lógica em que assentam as demonstrações são, em lugar de verdades absolutas, criações humanas que permanecem constantemente abertas a revisão.	A resolução de problemas será considerada "a pedagogia a utilizar na sala de aula. Particularmente será vista como um processo socialmente mediado de formulação de problemas e construção da sua solução, processo esse requerendo discussão para a negociação de sentidos, estratégias e provas" (64).

Quadro V

As correspondências apresentadas por Ernest são estabelecidas de acordo com o seguinte formato: "Um professor com uma perspectiva" (66) 'X' da matemática "verá a resolução de problemas como" (66) 'Y', em que 'X' designa cada uma das três filosofias indicadas pelo autor e 'Y' designa cada uma das possíveis interpretações que este autor apresenta relativamente à natureza da resolução de problemas.

Ernest salienta que podem existir desfasamentos entre o significado atribuído pelo professor à resolução de problemas e as práticas de ensino que adopta na sala de aula. Para este autor, embora a filosofia pessoal sobre a matemática sustentada pelo professor influencie as suas práticas pedagógicas, a actuação na sala de aula é mediada por outros factores entre os quais se encontram constrangimentos e oportunidades proporcionadas pelo contexto social do ensino. Nomeadamente, refere que jovens professores de matemática ansiosos por utilizar na sala de aula uma abordagem de ensino desta disciplina através da resolução de problemas ("problem solving approach" (67), têm frequentemente necessidade de fazer *"transigências estratégicas"* (68) e adoptar práticas de ensino mais próximas de um sistema dominante constituído por abordagens algorítmicas.

Deste modo, para Ernest, se o contexto social não for favorável, pode acontecer, por exemplo, que um professor com uma *filosofia absolutista progressista* sobre a matemática trate a resolução de problemas na sala de aula como um qualquer outro conteúdo a ser 'adicionado' ao currículo de matemática. E transigências estratégicas podem igualmente ser feitas por professores com perspectivas falibilistas sobre a matemática.

Pela leitura do artigo *Problem Solving: Its Assimilation to the Teacher's Perspective*, apesar da referência feita por Ernest à necessidade de, por vezes, o professor ter de transigir estrategicamente quando se trata de levar à prática a interpretação que concede à resolução de problemas, evidencia-se que este autor não põe em causa que o significado atribuído a este tema seja, de facto, determinado pela filosofia pessoal do professor sobre a matemática. Para Ernest, é esta filosofia que está subjacente e determina as teorias de ensino e aprendizagem a que o professor adere mesmo que não as possa implementar, na sala de aula, em toda a sua extensão. Como se viu, também para Lerman é a perspectiva filosófica sobre a matemática que o professor sustenta que vai determinar a perspectiva de ensino deste professor.

No entanto, será pertinente e adequado considerar que a interpretação que cada professor atribui à resolução de problemas seja directamente determinada pela sua filosofia pessoal sobre a matemática? Ter em conta o carácter sistémico da realidade educativa (69), e olhar o professor segundo a perspectiva sistémica da Pessoa proposta por Lerbet (70), conduz a questionar se estas relações serão tão imediatas e directas.

Nota conclusiva

Do que foi dito, ressalta que há na literatura de investigação em educação matemática referências diversas que evidenciam que há fortes relações entre perspectivas dos professores sobre a natureza da matemática e os referenciais educativos com que estes concebem o ensino da matemática. Nos artigos analisados de Lerman e Ernest, as relações que estes autores estabelecem entre essas perspectivas e possíveis significados de resolução de problemas no âmbito da matemática escolar parecem ser, frequentemente, de causalidade quase imediata. Esta causalidade transparece, nomeadamente, a partir de expressões e verbos que utilizam para descrever aquelas relações entre os quais se encontram, por exemplo, implicar, determinar, ser a maior determinante e ser consequência lógica.

No contexto educativo estas relações de causalidade levantam, contudo, algumas questões. Estas questões prendem-se, por um lado, com o reconhecimento do carácter sistémico da realidade educativa. Prendem-se também, seguindo Lakoff (71), com o questionamento de uma interpretação puramente racionalista do conhecimento. Prendem-se ainda com a hipótese de que o sentido que cada professor atribui a *resolução de problemas* e o papel e lugar que lhe concede, relativamente ao currículo de matemática, envolve muito mais do que factores matemáticos e, portanto, não pode ser quase que determinado pela adopção de uma ou outra perspectiva filosófica em especial.

Actualmente há diversos investigadores que partilham o reconhecimento do carácter sistémico da realidade educativa. A aplicação do conceito de sistema (72) ao estudo do acto educativo, evidencia que, em cada Escola, cada classe é um sistema de relações aberto, hipercomplexo e de carácter único, tendo uma dinâmica própria influenciada não apenas pelo professor mas também pelos alunos, pela Escola e pelo contexto social em que ela se insere. Particularmente, as práticas pedagógicas que o professor adopta e/ou implementa integram não apenas os seus compromissos epistemológicos relativamente à natureza da matemática, mas também as suas expectativas e experiências, a sua interpretação do currículo escolar de matemática e a forma como concebe a Educação e, em particular, a educação matemática.

Deste modo, considerar a resolução de problemas como a execução pontual de tarefas de resposta certa, que se segue à transmissão de conteúdos matemáticos feita pelo professor, ou interpretar a resolução de problemas como um contexto de ensino e aprendizagem em que os conceitos matemáticos surgem como relevantes para os problemas a resolver e em que os alunos são encorajados a colocar e testar hipóteses, sugerir métodos e tentar generalizar os seus próprios métodos ("mathematics through problem solving" utilizando a expressão de Lerman) requer que o professor, como fornecedor de informações, ceda lugar à ênfase no aluno, como gerador de ideias.

Esta mudança pode não ser uma tarefa nada fácil, ou nem sequer desejável, para alguns professores; envolve tempo, incerteza e imprevisibilidade; requer alterações no ambiente da sala de aula e nas relações de poder aí existentes; pode entrar em conflito, não apenas com a necessidade de controlo da classe por parte do professor, mas também com aquilo que ele crê constituir a sua função de professor e ainda com as próprias expectativas dos alunos desenvolvidas em ambientes de ensino em que esta abordagem da matemática não foi a adoptada.

Assim sendo, e como exemplo, é improvável que "ensinar matemática através da resolução de problemas" (adoptando a terminologia de Lerman) ou o considerar a resolução de problemas como "a pedagogia a utilizar na sala de aula" (seguindo Ernest) seja determinado pela filosofia falibilista do professor. O que está em jogo parece ser muito mais do que conceitos, processos ou factores matemáticos.

No entanto, se por um lado é de questionar a relação de causalidade quase imediata entre o conjunto de perspectivas filosóficas sobre a matemática sustentadas por professores, e possíveis interpretações de resolução de problemas, por outro lado é de reconhecer a existência de interacções acentuadas entre estes dois conjuntos.

É, por exemplo, muito provável que um professor que sustente uma perspectiva dualista da matemática deixe escapar muito do potencial da resolução de problemas enquanto via educativa para o ensino e aprendizagem da matemática. Com efeito, sendo a matemática, de acordo com esta perspectiva, uma ciência clara, bem definida e em que a 'confusão' e a 'bricolage' intelectual parecem dever ser evitadas a todo o custo, provavelmente explorar situações matemáticas abertas, tentar, experimentar e conjecturar não será considerado fazer matemática ou, mesmo sendo-o, constituirão, talvez, actividades entendidas como não necessárias à produção e desenvolvimento de ideias matemáticas pelos alunos. Assim, é também improvável que o sustentar de uma perspectiva dualista da matemática por parte de um professor deixe lugar para que a resolução de problemas seja interpretada como uma pedagogia adequada ao ensino da matemática.

É a compreensão deste paradoxal fenómeno que constitui, aliás, um dos desafios interessantes da vertente empírica do presente trabalho de investigação. É sobre esta vertente que incidirá o próximo capítulo.

Notas

(1) DAVIS (P.), HERSH (R.), 1988, "Da Certeza à Falibilidade" in A Natureza da Matemática, Cadernos de Educação e Matemática, Nº 1, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, p.47.
(2) THOMPSON (A.), 1985, "Teachers' Conceptions of Mathematics and the Teaching of Problem Solving" in Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives, E. Silver (Ed.), Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, p.282.
(3) THOMPSON (A.), 1992, "Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research" in Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, D.A. Grouws (Ed.), A Project of the National Council of Teachers of Mathematics, New York, Macmillan Publishing Company, p.130.
(4) Ibid, pp.129,130.
(5) PONTE (J.P.), 1992, Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação in Educação Matemática, Colecção Temas de Investigação, Instituto de Inovação Educacional, Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, p.195.
(6) Ibid, p.196.
(7) Sobre estas dimensões ver THOMPSON, 1992, op. cit., p.130.
(8) Ibid, p.130.
(9) Ponte, num seminário sobre Investigação em Educação Matemática realizado em 1992 na Ericeira, referiu que "o estudo das concepções depara-se com sérios problemas metodológicos. As pessoas raramente estão à vontade a expôr as partes mais íntimas do seu ser. Além disso, têm de um modo geral dificuldade em expressar as suas concepções, particularmente naqueles assuntos em que habitualmente não pensam de uma forma muito reflexiva. A identificação das concepções exige portanto uma abordagem especialmente imaginativa". Ver PONTE (J.P.), 1992, op. cit., p.231.
(10) Este autor é citado por LESTER (F.Jr.), GAROFALO (J.), 1987, The Influence of Affects, Beliefs and Metacognition on Problem Solving Behavior: Some Tentative Speculations, Paper Presented at the Annual Meeting of American Educational Research Association, Washington DC, 20-24 April, p.7.
(11) Ver RAYMOND (A.), SANTOS (V.), MASINGILA (J.), 1991, The Influence of Innovative Instructional Processes on Mathematical Beliefs Systems, Comunicação apresentada em Abril de 1991 no Annual Meeting of the American Educational Research Association, policopiado, p.2.
(12) Ver THOMPSON (A.), 1985, op. cit., p.282. Embora reconheça que se torna difícil descrever o que constitui uma crença e um conceito, Thompson, referindo Harvey, Hunt e Schroder, indica que à medida que um conceito se desenvolve, serve como medida psicológica, uma espécie de filtro experiencial através do qual os objectos são separados e avaliados
(13) THOMPSON (A.), 1992, op. cit., pp.130,141.
(14) GUIMARÃES (H.), 1988, Ensinar Matemática: Concepções e Práticas, Tese Apresentada para Obtenção do Grau de Mestre em Educação, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, p.20.
(15) PONTE (J.P.), referindo CONFREY, 1992, op. cit., p.196.
(16) MATOS (J.F.), 1991, Logo na Educação Matemática: Um Estudo Sobre as Concepções e Atitudes dos Alunos, Tese de Doutoramento, Lisboa, Projecto MINERVA, Pólo do DEFCUL, Universidade de Lisboa, p.72.
Esta ideia é reafirmada numa comunicação apresentada pelo autor num Seminário sobre Investigação em Educação Matemática realizado em 1992, na Ericeira, no âmbito de uma iniciativa da Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
Ver 1992, "Atitudes e Concepções dos Alunos: Definições e Problemas de Investigação" in Educação Matemática, Colecção Temas de Investigação, Instituto de Inovação Educacional, Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, p.132
(17) MOSCOVICI (S.) citando CODOL, 1989, "Des Représentations Collectives aux Représentations Sociales" in Les Représentations Sociales, Sous la Direction de D. Jodelet, Paris, Press Universitaires de France, p.82.
(18) Referido por MOSCOVICI (S.), 1989, ibid, p.64.
(19) Referido por MOSCOVICI (S.), ibid, p.65.
(20) MOSCOVICI, ibid, p.78.

(21) ABRIC (J.-C.), 1989, "L'Étude Experimental des Représentations Sociales" in Les Représentations Sociales, Sous la Direction de D. Jodelet, Paris, Press Universitaires de France, p.188.
(22) Expressão utilizada por ABRIC (J.-C.), ibid, p.191.
(23) Entre estes autores encontram-se por exemplo:
• ABRIC (J.-C.), 1989, ibid; ver, nomeadamente, as pp.197-201;
• FLAMENT (C.), 1989, "Structure et Dynamique des Représentations Sociales" in Les Représentations Sociales, Sous la Direction de D. Jodelet, Paris, Press Universitaires de France, pp.204-219. A citação incluída no texto é de Flament e encontra-se na p.206.
(24) MATOS (J.F.), 1992, op. cit., p.136.
(25) Expressão de FLAMENT (C.), 1989, op. cit., p.210.
(26) ABRIC (J.-C.), 1989, op. cit., p.197.
Abric salienta que, mais precisamente, é a finalidade da situação na qual a representação é produzida que vai determinar o(s) elemento(s) do nó central.
(27) MATOS (J.F.), 1992, op. cit., p.137.
(28) Alguns dos significados do conceito de *representação* podem, por exemplo, observar-se em:
• ALARCÃO (I.), TAVARES (J.), 1985, Psicologia do Desenvolvimento e da Aprendizagem, Livraria Almedina, pp.55-81, que referem, nomeadamente, os trabalhos de Piaget e Bruner;
• DENIS (M.), 1989, "La Psychologie Cognitive et la Notion de Représentation" in Image et Cognition, Paris, Presses Universitaires de France, pp.15-37;
• DUPONT (C.), 1989, "L' Étude des Représentations, un Enjeu pour les Educateurs" in Les Sciences de L' Éducation, 2, pp.51-67;
• KERLAN (A.), 1987, "La Notion de Représentation: Une Exigence Pédagogique et Culturelle" in Éducation Permanente, Nº 90, pp.69-80;
• PUTNAM (R.), LAMPERT (M.), PETERSON (P.), 1990, "Alternative Perspectives on Knowing Mathematics in Elementary Schools" in Review of Research in Education, 16, C. Cazden (Ed.), Harvard University Graduate School of Education, Washington, American Education Research Association, pp.68-71;
• SANTOS (M. E.), 1991, Mudança Conceptual na Sala de Aula — Um Desafio Pedagógico, Lisboa, Livros Horizonte; ver em particular p.42;
• SILVER (E.), 1985, "Research on Teaching Mathematical Problem Solving: Some Underrepresented Themes and Needed Direction" in Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives, E. Silver (Ed.), Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, pp.261,262;
Muitos destes autores referem, explicitamente, a diversidade de significados associados ao conceito de *representação* e as dificuldades que, nalguns casos, este facto, levanta.
Por vezes, o termo *representação* aparece em definições apresentadas nalguns estudos a par do termo *concepção*, havendo autores que definem uma das noções à custa da outra. Por exemplo, Meirieu refere que "no domínio da aprendizagem, *representação* designa a *concepção* que o sujeito tem num dado momento de um objecto ou fenómeno". Ver MEIRIEU (P.), 1990, Apprendre... Oui, Mais Comment, 5e édition, Paris, ESF éditeur, p.189.
E Janvier indica que um dos significados que a palavra *representação* toma na literatura psicológica pode designar-se por *concepção*. Para este autor, na literatura psicológica podem distinguir-se vários significados diferentes para a palavra representação. Um, em que a representação significa uma organização material de símbolos tais como diagramas, gráficos, esquemas, que se referem a outras entidades ou modelam vários processos mentais. Outro, mais amplo, em que a representação é uma certa organização do conhecimento no sistema mental humano ou na memória a longo prazo; é o material em bruto no qual se baseiam as actividades cognitivas; neste caso, e particularmente, a representação pode referir-se a imagens mentais. Janvier, para referir o primeiro significado indica que pode utilizar-se o termo *esquema* ou *ilustração*; para o segundo, o autor usa "um vocábulo mais geral denominado concepção". Ver JANVIER (C.), 1987, "Conceptions and Representations: The Circle as an Example" in Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics, C. Janvier (Ed.), Hillsdale, London, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, pp.148,149.
(29) DENIS (M.), 1990, ibid, p.33.
(30) Ibid, p.32.
(31) Citado por SANTOS (M.E.), 1991, op. cit., p.19.

(32) ANDRADE (A.J.), 1988, Le Sens des Mathématiques. Contribution à une Compréhension Personnalisée de leur Apprentissage, Mémoire présenté pour l'obtention du Diplôme d'Études Approfondies (Sciences de l'Éducation), Tours, policopiado, p.48.

(33) Na primeira secção do segundo capítulo desta terceira parte do estudo retomar-se-á o significado atribuído a esta expressão.

(34) Ver THOMPSON (A.), 1992, op. cit., pp.132-134.

(35) Referido por THOMPSON (A.), ibid, p.133.

(36) Referido por THOMPSON (A.), ibid, pp.132,133.
Sobre os trabalhos de Copes neste domínio foram também consultadas as seguintes obras:
• JONES (D.), 1988, A Review of Selected Research Related to the Revelance of Mathematics Teachers' Beliefs to Teacher Education and Instructional Practice, University of Georgia, February, Draft, policopiado, pp.11-14;
• ERNEST (P.) 1991, The Philosophy of Mathematics Education, Hampshire, The Falmer Press, pp.111-121.

(37) JONES (D.), 1988, ibid, p.11.

(38) ERNEST (P.), 1991, op. cit., p.113.

(39) JONES (D.), 1988, op. cit, p.13.

(40) THOMPSON (A.), 1992, op. cit., p.132. Sobre o pensamento de Lerman nesta área ver:
LERMAN (S.), 1983, "Problem-solving or Knowledge-centred: The Influence of Philosophy on Mathematics Teaching" in International Journal of Mathematics Education in Science and Techonology, Vol. 14, No. 1, pp.59-66.

(41) Referido por THOMPSON (A.), ibid, p.132. Ver também ERNEST (P.), 1989, "The Impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics" in Mathematics Teaching-The State of the Art, P. Ernest (Ed.), Philadelphia, The Falmer Press, p.250.

(42) ERNEST (P.), 1989, ibid, p.250.

(43) GUIMARÃES (H.), 1988, op. cit.

(44) Para lá do estudo de Guimarães e da síntese da investigação efectuada por Thompson e publicada em 1992, entre os trabalhos consultados relativamente à problemática das concepções dos professores sobre a matemática e o seu ensino encontram-se, por exemplo, os seguintes:
• COONEY (T.), 1985, "A Beginning Teacher's View of Problem Solving" in Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 16, No. 5, National Council of Teachers of Mathematics, pp.324-336;
• JONES (D.), 1988, op. cit;
• PONTES (J.P.), 1992, op.cit;
• THOMPSON (A.), 1985, op. cit.

(45) THOMPSON (A.), 1992, op. cit, p.133; Ponte salienta igualmente que investigações realizadas sugerem que a cultura matemática dos professores é reduzida, isto é, os professores conhecem pouco da história e filosofia desta ciência bem como das suas principais áreas de aplicação. Ver PONTE (J.P.), 1992, op. cit, p.209.

(46) GUIMARÃES (H.), 1988, op. cit., pp.208,243. A citação encontra-se na p.208.

(47) PONTE (J.P.), 1992, op. cit, p.211.

(48) THOMPSON (A.), 1992, op. cit., p.135.

(49) Ibid, p.136. Estes modelos são descritos pela autora nas pp.136,137.

(50) THOMPSON (A.), 1992, ibid, p.137. Relativamente à investigação sobre o ensino eficaz ver, por exemplo, PUTNAM (R.), LAMPERT (M.), PETERSON (P.), 1990, op. cit. pp.124-130.

(51) THOMPSON (A.), 1992, ibid, p.136.

(52) LERMAN (S.), 1983, op. cit., p.59. O sublinhado não está incluído no texto original. Neste texto Lerman escreve:
"I suggest that one's perspective of mathematics teaching is a logical consequence of one's epistemological commitment in relation to mathematical knowledge, and not merely one of expediency in response to societal pressures, or of pedagogical convenience".

(53) Ibid, p.62. O sublinhado não está incluído no texto original.

(54) Ibid, p.59. No original estas designações correspondem a "mathematics as a body of knowledge" e "mathematics through problem-solving" (pp.62,65). O autor utiliza, contudo, nalgumas partes do texto designações alternativas a estas. Assim, na p.59 aparece "knowledge-centred" como alternativa a "mathematics as a body of knowledge" e na p.60 como alternativa a "mathematics through problem-solving" encontra-se "mathematics as a way of thinking".

(55) Ibid, p.62. O sublinhado não está incluído no texto original.

(56) Ibid, p.62.

(57) Expressões utilizadas por LERMAN (S.), ibid, p.63. Sobre o ensino da matemática através da resolução de problemas ver em especial as pp.63-65.

(58) Ibid, p.64.

(59) ERNEST (P.), 1992, "Problem Solving: Its Assimilation to the Teacher's Perspective" in Mathematical Problem Solving and New Information Technologies, Research in Contexts of Practice, J.P. Ponte, J.F. Matos, J.M. Matos, D. Fernandes (Eds.), Nato ASI Series, Series F: Computer and Systems Sciences, Vol. 89, Berlin, p.298. O sublinhado não está incluído no texto original.

(60) Ibid, pp.292,293.

(61) Ibid, p.287. O sublinhado não está incluído no texto original.

(62) Ibid. Ver especialmente as pp.293-296.

(63) Ibid, pp.294,295.

(64) Ibid, p.295.

(65) Ibid, p.293.

(66) Ibid. Ver a p.294. Aí pode ler-se, por exemplo, relativamente à tese 2.1: "A teacher with an absolutist view of mathematics will view problem solving as the carrying out of non-routine teacher imposed tasks with determinate right answers".

(67) Ibid, p.292.

(68) Expressão utilizada por ERNEST (P.), ibid.

(69) Entre os investigadores que partilham o reconhecimento do carácter sistémico da realidade educativa encontram-se, por exemplo, BATES (F.), CANÁRIO (R.), LERBET (G.) e ROSNAY (J.).

Neste âmbito publicaram, entre outras, as seguintes obras:

• BATES (F.), MURRAY (V.), 1981, "L'École, Systéme de Comportements" in Sociologie de l'École-Pour une Analyse de l'Établissement Scolaire, textes choisis et presentés par Alain Beaudot, Paris, Dunod, pp.53-67;

• CANÁRIO (R.), 1989, O Estabelecimento de Ensino no Contexto Local, Conferência proferida na Universidade de Verão "Le Management en Éducation", Universidade de Toulouse, 4-10 Julho 1989, policopiado;

• LERBET (G.), 1984, Approche Systèmique et Production de Savoir, U.N.M.F.R.E.O., Éditions Universitaires;

• LERBET (G.)1986, De la Structure au Systéme, Essai sur l'Evolution des Sciences Humaines, U.N.M.F.R.E.O., Éditions Universitaires;

• ROSNAY (J.), 1977, O Macroscópio, Lisboa, Editora Arcádia;

• ROSNAY (J.), 1981, "L'Approche Systémique Appliquée à l'Établissement Scolaire" in Sociologie de l'École-Pour une Analyse de l'Etablissement Scolaire, textes choisis et presentés par Alain Beaudot, Paris, Dunod, pp.141-154.

(70) LERBET (G.), 1981, Une Nouvelle Voie Personnaliste: Le Système-Personne, U.N.M.F.R.E.O., Éditions Universitaires, Maurecourt.

(71) LAKOFF (G.), 1987, Women, Fire and Dangerous Things, Chicago, The University of Chicago Press.

(72) O conceito de sistema está, segundo Canário, no "cerne de um novo paradigma científico, a sistémica", segundo Rosnay "uma nova maneira de ver, de compreender e de agir" (CANÁRIO, 1989, ibid, p.6).

Rosnay refere que de acordo com a definição mais corrente "um sistema é um conjunto de elementos em interação dinâmica" embora uma definição mais completa possa ser a seguinte: "um sistema é um conjunto de elementos em interacção dinâmica, organizada em função de uma finalidade" (ROSNAY (J.), 1977, op. cit., pp.78,85.

Capítulo II - Contribuição empírica para a compreensão das representações pedagógicas dos professores

Nota introdutória

Este capítulo constitui a contribuição empírica deste estudo para a compreensão de como os professores de matemática interpretam a resolução de problemas, no contexto da matemática escolar em geral, e no contexto do desenvolvimento dos alunos em particular. Os objectivos desta contribuição são pesquisar e compreender as *representações pessoais* dos professores relativas a problema e resolução de problemas no âmbito da educação matemática, bem como explorar possíveis relações entre estas representações e as suas *filosofias pessoais* sobre matemática.

É neste contexto que se situam as duas questões centrais da contribuição empírica deste estudo que foram investigadas junto de quatro professores de matemática portugueses que leccionam esta disciplina ao nível do terceiro Ciclo do Ensino Básico ou do Ensino Secundário:

- Que sentido atribuem professores de matemática que ensinam esta disciplina em salas de aula 'reais' a *problema* e *resolução de problemas* no contexto da educação matemática?
- Que relações existem entre *representações pedagógicas* desses professores relativas à resolução de problemas e as *filosofias pessoais* que sustentam relativamente à matemática?

Este capítulo encontra-se estruturado em três secções. Numa primeira secção, apresenta-se o significado atribuído neste estudo às expressões *representação pessoal*, *representação pedagógica* e *filosofia pessoal* sobre a matemática.

Numa segunda secção, indica-se a metodologia adoptada para a recolha de dados de terreno, refere-se o processo de elaboração dos instrumentos utilizados nessa recolha e descreve-se a primeira fase de análise dos dados. Esta fase destinou-se, fundamentalmente, a identificar possíveis temas e categorias de análise que orientaram o trabalho realizado em fases de investigação futuras.

Numa terceira secção, tendo em conta os objectivos do presente estudo, as questões em torno das quais se organiza a problemática de investigação e o quadro teórico apresentado ao longo das três partes que o constituem, descrevem-se e interpretam-se os dados recolhidos junto dos professores participantes no estudo.

1 - Definição de termos

As *representações pessoais* são entendidas, neste estudo, como sendo o processo e o produto da actividade mental de cada sujeito, constituindo construções dinâmicas do real, permanentemente actualizadas, elaborações pessoais que têm a sua fonte no afectivo, no cognitivo, no quotidiano e no social e que geram "o germe da sua própria actualização" (1). De natureza intrinsecamente cognitiva e afectiva, estas construções formam-se, mais ou menos conscientemente, através de processos de integração e confrontação com os objectos e os outros; guiam as condutas e são elaboradas a partir do que de cada pessoa é, do que foi e do que projecta ser. Integram concepções que um sujeito tem num dado momento sobre um objecto ou fenómeno, e como principais elementos de interpretação da realidade são sistemas subjacentes a todo o processo de construção do saber. Um mesmo objecto ou situação pode estar, pois, na base de *representações pessoais* muito diferentes.

As *representações pessoais* distanciam-se do tradicional conceito de imagem enquanto reflexo interno de uma realidade externa. É o sujeito quem constrói as suas representações através de um processo complexo e longo, que integra a sua história passada e projectos futuros, através de uma actividade pessoal e social, através das interacções que estabelece com os diversos contextos em que se vai situando e em função da "dialéctica bipolar sujeito/objecto" (2).

Assim, as *representações pessoais* sobre a matemática englobam elementos dos domínios cognitivo, afectivo e social e são construídas, por cada pessoa, na sala de aula, na Escola e em experiências do dia a dia.

Para designar as *representações pessoais* dos professores relacionadas com a interpretação que concedem a resolução de problemas no âmbito da educação matemática, utiliza-se, na contribuição empírica deste estudo, a expressão *representações pedagógicas*. Esta expressão constitui uma expressão heurística útil convencionada pelo investigador.

As *representações pedagógicas* relativas à resolução de problemas, integram dados referentes ao sentido que cada professor atribui a problema e resolução de problemas, bem como à relevância, papel e lugar da resolução de problemas relativamente ao ensino e aprendizagem da matemática na Escola. Nomeadamente, incluem representações pessoais dos professores sobre as funções dos problemas no ensino, as preferências quanto aos problemas que importa resolver na sala de aula, as finalidades e importância da resolução de problemas e a natureza das actividades de ensino da resolução de problemas.

Em cada professor, as representações pedagógicas relativas à resolução de problemas enquadram-se num sistema, mais amplo, constituído pelas suas representações pessoais relativas à natureza do ensino em contextos escolares. Estas integram finalidades do ensino e aprendizagem da matemática, perspectivas sobre o papel do professor e do aluno, natureza das actividades matemáticas que importa proporcionar aos alunos para que estes possam aprender matemática e actividades de ensino que o professor adopta e/ou pensa como apropriadas e preferíveis para ensinar matemática na Escola.

As *representações pessoais* dos professores sobre a matemática, constituem a sua *filosofia pessoal* sobre a matemática e referem-se, neste estudo, a conceitos, significados, imagens mentais e opiniões respeitantes à matemática enquanto ciência. Incluem elementos relativos à origem e natureza da matemática bem como a processos de produção do saber matemático.

2 - Metodologia de recolha e análise de dados

2.1 - Planificação das entrevistas

Ao pretender-se estudar as *representações pedagógicas* de cada professor relacionadas com a resolução de problemas bem como a sua *filosofia pessoal* sobre a matemática, um estudo interpretativo e de "inspiração etnográfica" (3) afigurou-se como o mais apropriado para abarcar a complexidade das situações a investigar, abordá-las com mais profundidade e permitir uma maior sensibilidade a diferenças individuais.

Esta opção prendeu-se tanto com o carácter único, subjectivo e peculiar das *representações pessoais* de cada professor, o que torna complexo o objecto desta investigação, como com o pouco conhecimento que se tem sobre este objecto.

Uma vez que se pretendia essencialmente descrever e compreender comportamentos e sistemas pessoais em situações particulares, mais do que produzir conhecimentos passíveis de generalização, não se partiu de hipóteses a testar, mas procurou-se sobretudo partir de questões, explorar possíveis respostas e formular novas questões.

Efectivamente, como referem Borg e Gall, "alguns estudos são exploratórios por natureza, não são guiados por hipóteses pois o investigador não tem suficiente compreensão do fenómeno para fazer conjecturas acerca da relação entre os constructos. Estabelece o propósito da investigação em forma de questão ou objectivo em vez de hipóteses. A pesquisa exploratória tende a estudar muitas variáveis e suas relações em ordem a posterior compreensão do fenómeno" (4).

Como instrumento de recolha de dados, optou-se por entrevistas qualitativas semi-estruturadas, realizadas junto de seis professores do terceiro Ciclo do Ensino Básico ou Ensino Secundário.

Assim, no estudo principal foram realizadas a partir de Março de 1991, doze entrevistas em dois momentos. Um primeiro momento, que decorreu entre 20/03/91 e 24/04/91, e um segundo momento que decorreu entre 09/05/91 e 04/06/91. Cada professor foi, portanto, entrevistado duas vezes, tendo-se obtido uma gravação audio de cada uma das entrevistas efectuadas.

Todas as entrevistas foram realizadas na Escola onde cada professor leccionava, num gabinete ou sala de aula livre, em horário estabelecido de comum acordo. Cada uma delas foi conduzida, directamente, pelo investigador que posteriormente as transcreveu na íntegra.

Anteriormente aos dois momentos de realização destas entrevistas, foi ainda realizado um estudo prévio cuja base foram três entrevistas feitas a professores, com diversas habilitações académicas e experiências profissionais, não envolvidos no estudo principal. O objectivo deste estudo prévio foi o de analisar a adequabilidade das questões pensadas para o estudo principal, formuladas a partir de uma revisão de literatura sobre os temas em estudo, aos objectivos da presente investigação.

2.1.1 - Porquê entrevistas semi-estruturadas?

Para Ghiglione e Matalon (5) uma entrevista é uma conversa com um objectivo, um encontro interpessoal que se desenrola num dado quadro e situação social em que estão envolvidos a presença de um profissional e de um sujeito "naif".

O princípio fundamental das entrevistas qualitativas é proporcionar um campo no qual cada entrevistado possa exprimir o que pensa por palavras suas. Fundamentalmente é este aspecto que as distingue de entrevistas fechadas, questionários ou testes tipicamente usados em avaliações quantitativas, uma vez que aqui os entrevistados são levados a enquadrar as suas experiências, sentimentos e perspectivas, nas categorias do entrevistador (6).

Classicamente distinguem-se três tipos de entrevistas: (a) não directivas ou livres; (b) semi-directivas; (c) directivas ou estandardizadas.

Cada um destes três tipos apresenta características próprias. Resumidamente, no caso de uma entrevista não directiva, o entrevistador coloca o tema da entrevista que essencialmente é amplo e ambíguo. Aqui, a noção de ambiguidade deve ser compreendida "como a presença de um tema que introduz a discussão, mas que permite ao sujeito interpretá-lo a partir do seu quadro de referência" (7). Neste tipo de entrevista, as questões são geradas pela interacção entre o entrevistador e o entrevistado.

No que respeita à entrevista semi-directiva, também chamada semi-estruturada, existe, previamente à entrevista, um esquema da mesma, mas a ordem pela qual os temas são abordados é livre. Se o entrevistado não aborda espontaneamente um ou mais dos temas do esquema, o entrevistador pode colocar-lho. Estas entrevistas são designadas por Patton (8) como entrevistas feitas a partir de um guião geral. Segundo este autor, um guião de entrevista é uma lista de questões ou perguntas que devem ser exploradas ao longo da entrevista. A sua função é garantir que, basicamente, seja obtida informação sobre os mesmos temas a partir de um certo número de pessoas. Nestas entrevistas, o entrevistador permanece livre para construir uma conversa numa área particular, estabelecer o estilo da conversa e fazer perguntas espontaneamente. No entanto, deve focar-se no tema ou temas particulares previamente determinados.

Finalmente, as entrevistas directivas, designadas também por entrevistas feitas a partir de um guião 'standard', estão próximas dos questionários de questões abertas. Nelas não existe praticamente ambiguidade no sentido atrás referido. As palavras a usar, as questões a colocar e a ordem pela qual devem ser colocadas, estão previamente fixadas. Estas entrevistas usam-se frequentemente quando há vários investigadores numa situação e se pretende minorar o 'efeito' do investigador (9).

Optou-se por entrevistas semi-estruturadas por parecer que seriam as que melhor conservariam uma interacção, focada nos temas em estudo, entre o entrevistador e os professores a entrevistar, permitindo, contudo, o emergir de experiências e compreensões individuais, ou seja, a expressão do mundo interior dos entrevistados.

2.1.2 - Selecção dos professores

Refere Ponte que "as concepções dos professores não constituem um todo relativamente homogéneo. Diferenciam-se claramente pelos níveis de ensino, pela sua origem profissional (isto é, pelo tipo de formação inicial, formação científica e formação pedagógica), pela sua inserção social e pelas suas opções ideológicas e educativas" (10).

Tendo em conta que um dos objectivos da presente investigação era facilitar a possível emergência de diferentes *representações pessoais* sobre os temas em estudo, procurou-se privilegiar a diversidade de professores a entrevistar seguindo alguns critérios de escolha intencional. Estes critérios foram o de serem professores de matemática do terceiro Ciclo do Ensino Básico ou do Ensino Secundário com pelo menos três anos de experiência de ensino e com formações profissionais e habilitações académicas diversificadas.

A exigência dos professores a entrevistar terem, pelo menos, três anos de experiência de ensino foi estabelecida para garantir, por parte dos professores seleccionados, algum conhecimento dos currículos de matemática e de aspectos diversos relacionados com a problemática do ensino e aprendizagem da matemática e da resolução de problemas.

O critério de diversificar as formações académicas prendeu-se com o facto de se pretender explorar se a frequência de uma licenciatura em matemática influenciaria o desenvolvimento, nos professores, de *filosofias pessoais* sobre esta ciência diferentes das construídas por outros professores que concluíram cursos em que a matemática aparece, com mais ênfase e frequência, como subsidiária de outras áreas do saber (Física, Engenharia electrotécnica, Engenharia de máquinas, Economia, Construção Civil, etc).

A opção de convidar a participar no estudo professores não profissionalizados, a par de professores profissionalizados, prendeu-se com o facto de que o tempo de profissionalização pode ter constituído para os professores profissionalizados uma etapa importante da sua vida profissional. Nessa etapa, provavelmente, estes professores foram confrontados e tiveram oportunidade de reflectir, de uma forma sistemática e organizada, sobre formas de ensino que não as suas ou as dos seus antigos professores.

Ora "é através da reflexão que os professores desenvolvem análises racionais coerentes para as suas perspectivas, hipóteses e acções, e se tornam mais despertos para alternativas viáveis" (11). Assim, será que a etapa de profissionalização, teoricamente um tempo de reflexão e análise sobre si próprio e sobre os outros, contribuiu para a construção de *representações pessoais* sobre os temas em estudo diferentes das construídas pelos professores não profissionalizados? Foi a exploração desta questão que esteve subjacente à diversificação da experiência profissional dos professores a entrevistar.

De acordo com estes critérios, os professores foram inicialmente convidados a participar no presente estudo a partir do Quadro VI:

Experiência profissional	**Formação académica**	**Licenciatura em matemática**	**Outras habilitações**
Professor não profissionalizado		D	C
Professor profissionalizado	Sem experiência profissional em formação de professores	B	A
	Com experiência profissional em formação de professores	F	E

Quadro VI

Assim, foram contactados os seguintes seis professores:

A - Professor Artur, bacharel em Engenharia de Máquinas, profissionalizado, efectivo, sem experiência em formação de professores e com cerca de doze anos de experiência de ensino;

B - Professora Beatriz, licenciada em Matemática - Ramo Educacional, profissionalizada, efectiva, sem experiência em formação de professores e com cerca de onze anos de experiência de ensino;

C - Professora Cândida, licenciada em Economia, não profissionalizada e com cinco anos de experiência de ensino;

D - Professor Duarte, licenciado em Matemática Aplicada, não profissionalizado e com três anos de experiência de ensino;

E - Professora Eloísa, bacharel em Engenharia Civil, profissionalizada, efectiva, com cerca de doze anos de experiência de ensino e tendo já desempenhado funções de delegada acompanhante de professores em profissionalização em serviço;

F - Professora Filipa, licenciada em Matemática Aplicada, profissionalizada, efectiva, com cerca de treze anos de experiência de ensino, desempenhando actualmente as funções de orientadora de estágio de matemática das licenciaturas do Ramo Educacional.

Estes professores, para quem foram escolhidos nomes fictícios, leccionavam matemática em cinco escolas secundárias, sendo os contactos estabelecidos a partir de outros professores ou através dos Conselhos Directivos das respectivas escolas.

Antecedendo a primeira entrevista houve um encontro com cada um dos professores, em que foi explicado o objectivo da pesquisa e a necessidade das entrevistas serem gravadas em audio. Foi ainda garantido o anonimato face às declarações prestadas. Todos os professores contactados concordaram, sem reservas, com a participação no estudo.

No momento em que se iniciava a análise das doze entrevistas conduzidas junto destes seis professores, considerou-se que seriam informantes privilegiados os professores Artur, Beatriz, Eloísa e Filipa. Esta opção foi tomada face à diversidade de elementos presentes nas transcrições das entrevistas conduzidas junto destes professores e tendo em conta que as restantes entrevistas não introduziam dados relevantes considerando os objectivos da presente investigação.

Os trabalhos de Huberman (12) evidenciam que os professores Artur, Beatriz, Eloísa e Filipa, todos eles com mais de dez anos de experiência de ensino, tinham já ultrapassado, utilizando expressões deste autor, a *fase da exploração*, correspondente à entrada na profissão, e a *fase de estabilização* em que há a consolidação de um reportório pedagógico de base.

2.2 - Processo de elaboração dos guiões das entrevistas.

Para a realização das entrevistas incluídas no estudo principal foram elaborados dois guiões, um para cada momento. Estes guiões foram sofrendo alterações antes da realização dessas entrevistas e à medida que o estudo ia decorrendo. Algumas destas alterações resultaram do estudo prévio anteriormente referido. Outras resultaram de questões levantadas pelas respostas dos professores às entrevistas realizadas no primeiro momento. Estes guiões são incluídos no anexo 1 apresentado no final deste trabalho.

As respostas às questões incluídas nos guiões eram consideradas pontos de partida para a discussão, mais profunda, dos temas em estudo.

Para o primeiro momento estabeleceu-se que as questões incluídas no respectivo guião fossem colocadas de uma forma tão articulada quanto possível com as respostas dadas pelo entrevistado, de modo a que a 'conversa' fluísse naturalmente.

Iniciava-se este primeiro momento com a questão:

> "Houve com certeza no passado razões que o levaram a ser professor de matemática. Gostaria que me falasse sobre três dessas razões".

A resposta a esta questão introdutória, para lá de fornecer elementos importantes sobre o percurso profissional de cada entrevistado, servia ainda de ponte para a introdução natural de outras questões mais directamente focadas nos temas em estudo. Aliás veio a acontecer, num ou noutro caso, que essa resposta se dirigiu já para esses temas.

No segundo momento, optou-se por uma metodologia ligeiramente diferente. O guião era constituído por seis questões de base, que foram escritas cada uma em seu cartão, sendo apresentadas aos professores ao longo da entrevista e sempre pela mesma ordem. O entrevistado começaria por ler cada questão deixando-se que ele próprio escolhesse o tempo e o momento oportuno para iniciar a resposta. Em seguida esta questão seria explorada, tal como acontecia na primeira entrevista.

Este procedimento deveu-se ao facto de, no primeiro momento, não ter sido fácil 'conversar', especialmente com alguns dos professores, sobre aspectos relacionados com a matemática. Com efeito, alguns desses aspectos pareciam não fazer parte das suas preocupações habituais. Frequentemente foi pedido que a(s) questão(ões) fosse(m) repetida(s), tendo sido enunciada de uma forma explícita, e por diversas vezes, a dificuldade sentida relativamente a algumas das perguntas colocadas.

A título de exemplo, apresenta-se um extracto da primeira entrevista realizada com a professora Beatriz e que traduz essa dificuldade relativamente a uma questão relacionada com o rigor matemático:

> "(Risos) É uma pergunta um bocadinho difícil!... É capaz de ter sido atingido [o rigor em matemática] no sentido em que a matemática se desenvolveu bastante... É a tal coisa, é muito difícil a gente desligar-se daquilo que está a ensinar aos miúdos." (Beatriz, p.80) (13).

Assim, escrever as questões em cartões que cada entrevistado lia e interpretava ao seu ritmo e dar-lhe todo o tempo que quisesse para poder pensar sobre o que acabava de ler, foi a estratégia adoptada para ver se era possível tornar mais fáceis e proveitosas especialmente as 'conversas' sobre a matemática.

A exploração do sentido que os professores entrevistados atribuíam a *problema* e *resolução de problema* foi deixada fundamentalmente a cargo deste segundo momento de entrevistas. Com efeito, das seis questões escritas nos cartões, quatro delas incidiam directamente sobre esta temática.

Pretendeu-se com este procedimento que a primeira entrevista não mostrasse a resolução de problemas como um tema a que era dado um relevo especial. Sem pôr em causa a honestidade dos professores, procurou-se, assim, evitar que uma documentação posterior sobre este tema, realizada por estes antes da segunda entrevista, pudesse estimular alguns deles a repetir no segundo momento aquilo que é social e profissionalmente mais aceitável dizer.

As questões incluídas nos guiões foram tendencialmente perguntas abertas tendo-se, nomeadamente, recorrido a "episódios" com o sentido que lhe é atribuído por Cooney.

2.2.1 - Recurso a episódios

Cooney considerada que episódios são "situações hipotéticas que são utilizadas para discussões em profundidade acerca da matemática e do seu ensino" (14). Segundo este investigador, os episódios podem variar em 'abertura' (por exemplo, alguns podem requerer uma reacção a uma posição anteriormente estabelecida e outros podem não dar nenhuma indicação da gama possível de respostas), relativamente à 'pessoa' que responde (por exemplo, algumas vezes o entrevistado pode supor que está a responder por ele próprio e outras vezes pode supor que responde por outra pessoa) e em 'realismo' (alguns podem ser bastante literais e outros requerer um pouco de imaginação).

A título de exemplo, apresentam-se dois dos episódios usados nas entrevistas:

1 • "Em tempos li que o trabalho de um matemático e o trabalho de um aluno na sala de aula, apesar de serem diferentes na sua complexidade não o são na sua natureza. O que pensa dessa ideia?" (primeiro momento).

2 • "Há quem defenda que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas deve ser um eixo organizador do ensino da matemática. No entanto, há também quem não adira completamente a esta ideia argumentando com factores de natureza variada. Gostaria que falasse sobre o que pensa de tal orientação" (segundo momento).

Pretendia-se que as respostas dadas pelos entrevistados às várias questões que lhe iam sendo colocadas fossem, em seguida, exploradas de modo a permitir o maior aprofundamento possível do tema em causa. Assim, e por exemplo, a exploração feita a partir do segundo episódio aqui apresentado, visava, essencialmente, compreender o ponto de vista dos entrevistados relativamente aos reflexos que teria o assumir da referida orientação na organização dos ambientes educativos para o ensino e aprendizagem da matemática.

Os dois últimos cartões apresentados a cada professor, no final da segunda entrevista, remetiam para a realização de tarefas em que se solicitava a análise de dois documentos que lhe eram fornecidos. Estes documentos designados por anexo A e anexo B encontram-se incluídos no anexo 1 apresentado no final deste trabalho.

A opção de deixar estas tarefas sempre para a parte final do segundo momento de entrevistas teve por objectivo evitar que as respostas às restantes questões sofressem o efeito da presença de propostas concretas vindas do investigador.

2.2.2 - Realização de tarefas pelo entrevistado

Com o quinto cartão foi apresentado a cada entrevistado um conjunto de nove exemplos concretos de exercícios ou possíveis problemas de matemática (anexo A) referindo-se que essas *propostas de trabalho* (expressão por que foram designadas) tinham sido recolhidas de artigos e livros de texto como sendo potenciais situações a trabalhar em contextos escolares. Pedia-se, então, ao professor para falar sobre as que pessoalmente considerava problemas e porquê, se haveria alguma(s) que preferencialmente trabalharia com os seus alunos, e sobre o valor didáctico de cada uma. Um dos principais objectivos desta tarefa era tentar compreender a partir da 'conversa' decorrente da análise dessas propostas qual o sentido que o entrevistado atribuía a *problema de matemática*.

Processo de selecção das propostas de trabalho incluídas no anexo A: A selecção das propostas de trabalho incluídas no anexo A teve fundamentalmente por base a análise dos artigos *On the Nature of Problems* e *Um (Bom) Problema (Não) é (Só)...*, respectivamente da autoria de Borasi e de Abrantes (15).

Foi a integração quer dos pontos comuns, quer das singularidades, introduzida pela análise dos exemplos concretos apresentados por estes dois autores, que guiou a procura das propostas de trabalho a incluir no anexo A. Estas propostas, em número de nove, e designadas por A1, A2,...,A9, bem como a sua classificação de acordo com a terminologia adoptada a partir daqueles autores, podem observar-se no Quadro VII:

Desig- nação	Classificação	Propostas de trabalho apresentadas aos professores
A1	Problema para equacionar	Com o dinheiro que a mãe lhe deu o João foi comprar guloseimas a uma confeitaria. Gastou 1/4 do dinheiro que levava em pastéis, 2/5 em chocolates e 1/8 em rebuçados, sobrando-lhe 5$00. Quantos escudos tinha o João?
A2	Enigma/Problema para descobrir	Usando apenas seis fósforos, formar quatro triângulos equiláteros geometricamente iguais.
A3	Problema para demonstrar	Mostre que a amplitude de um ângulo com o vértice no interior de uma circunferência é igual à semi-soma das amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados e os prolongamentos destes lados.
A4	Problema da vida real	Os Silvas desejam alcatifar um quarto de forma irregular. Para isso necessitam de fazer uma estimativa da quantidade de alcatifa a comprar e de quanto vão gastar.
A5	Problema de palavras	Num dia em que um tanque estava vazio, uma torneira despejou-lhe para dentro 235,2 litros de água. No dia seguinte, o dono do tanque tirou dessa água 105,4 litros para regar a horta. Que quantidade de água ficou no tanque?
A6	Situação	Considerar os seguintes ternos de números: 3 4 5 5 12 13 8 15 17 7 24 25
A7	Situação problemática	O produto de três números inteiros consecutivos é sempre um número par múltiplo de 3. Comentar a situação se substituirmos 'produto' por 'soma'.
A8	Exercício	Calcular utilizando, quando possível, as regras de cálculo com potências: $\left[2^{-2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^{-4} : \left(2 - \frac{1}{2}\right)^{-6}$
A9	Prova de uma conjectura	Dois triângulos que tenham entre si cinco elementos iguais - três lados e dois ângulos ou três ângulos e dois lados - serão necessariamente iguais? Nota: Usa-se *iguais* no sentido de *congruentes* ou *geometricamente iguais*.

Quadro VII

<u>Selecção do problema e propostas de resolução incluídas no anexo B:</u> Com o sexto cartão foi apresentado o anexo B, onde se incluía o que foi designado por *problema dos discos*, bem como quatro propostas de resolução deste problema (B1, B2, B3, B4) supostamente elaboradas por um conjunto de alunos do 9º ano de escolaridade. Os processos de resolução apresentados conduziam todos ao mesmo

resultado correcto embora por caminhos bastante diferentes. Solicitava-se, em seguida, ao entrevistado para supor que era o professor que tinha apresentado a tarefa e imaginar que pretendia classificar as propostas de resolução apresentadas.

O problema dos discos constitui uma adaptação de um outro problema proposto por Gardner (16). Uma das razões por que foi escolhido está relacionada com o facto deste problema poder ser resolvido através de processos, bastante diversificados, todos eles envolvendo procedimentos matemáticos disponíveis e acessíveis à generalidade dos alunos do 9º ano de escolaridade.

A primeira proposta de resolução apresentada era algébrica. Consistia em pôr o problema em equação e depois resolver a equação obtida. Na segunda proposta, obtinha-se a solução para o problema por tentativas. A terceira proposta, apresentava um esquema de setas que traduzia a utilização da heurística *trabalhar do fim para o princípio*. Na quarta proposta de resolução o problema inicial era decomposto em dois subproblemas do mesmo tipo. A resolução destes subproblemas permitia encontrar a solução do problema principal. Uma das razões que levou à selecção desta última proposta de resolução foi o facto de, no estudo prévio, dois dos três professores entrevistados considerarem que era a proposta de resolução mais elegante do ponto de vista matemático. Esperava-se, assim, obter dados que possibilitassem, relativamente a cada professor, alargar a compreensão da sua perspectiva sobre componentes da face extra-lógica da matemática.

2.3 - Realização das entrevistas

No primeiro momento de entrevistas, ainda que de um modo geral todas as questões incluídas no guião tivessem sido colocadas a cada entrevistado, foram-no em alturas diferentes e nem sempre pela mesma sequência. As transcrições destas entrevistas foram realizadas antes de se efectuarem as do segundo momento. Tal facto prendeu-se, por um lado, com a detecção de lacunas e a identificação de questões suscitadas pelas respostas de cada entrevistado, e por outro lado, com a procura de aspectos pouco claros nessas respostas.

Assim, durante a segunda entrevista realizada com cada professor, foram colocadas, para além das questões incluídas no guião do segundo momento, algumas questões previstas para o primeiro momento e que não foram então postas, ou questões cuja resposta não foi considerada suficientemente clara. Foram, ainda, colocadas algumas perguntas suscitadas pela primeira fase de análise das declarações efectuadas durante a primeira entrevista.

Dado o carácter pouco estruturado das entrevistas e o facto das questões serem preferencialmente abertas, não houve grande preocupação com o tempo destinado a cada uma, oscilando a sua duração entre sessenta e noventa minutos. Assim, e durante os dois momentos, cada professor foi entrevistado entre duas horas e meia a três horas.

Duas das entrevistas (uma incluída no primeiro momento e outra no segundo) tiveram que ser interrompidas por impedimentos profissionais dos entrevistados. Uma delas prosseguiu passados oito dias e a outra continuou no dia seguinte.

Durante as entrevistas procurou estabelecer-se, com cada um dos participantes, no estudo uma relação de empatia que possibilitasse ir além de 'lugares comuns' muitas vezes aceites entre os professores de matemática. Pretendia-se que os professores se sentissem o mais à vontade possível para dizer, de facto, o que pensavam.

O tom informal em que decorreram as entrevistas, que aliás transparece nas transcrições realizadas, mostra que este objectivo parece ter sido, de algum modo, conseguido. No entanto, e muito embora a estratégia adoptada no segundo momento com o objectivo de facilitar que os professores falassem sobre matemática, pode dizer-se, citando Guimarães, que "de uma forma geral não foi fácil falar de matemática com os professores envolvidos no estudo" (17). Continuaram a existir, nesse segundo momento, tal como tinha já acontecido no primeiro, questões relacionadas com a matemática enquanto ciência consideradas "muito profundas" e em que o "pessoal é apanhado de surpresa":

> "Isto são perguntas muito profundas... O pessoal é apanhado de surpresa... São coisas muito profundas e aliás foi esta já precisamente a ideia com que fiquei da primeira conversa... " (Artur, p.32) (18).

Após a realização das duas entrevistas, foi entregue a cada um dos professores a transcrição total das entrevistas com ele realizadas, sendo-lhe pedido que a lesse tendo em vista o comentário ou eventual esclarecimento das declarações efectuadas. Tal procedimento prendeu-se com a importância dos dados obtidos traduzirem, de facto, o melhor possível o pensamento do entrevistado, minimizando eventuais desencontros de linguagem e compreensão entre ele e o investigador.

Na generalidade dos casos, a leitura das transcrições pelos professores não introduziu quaisquer alterações. Quando as houve foram muito pontuais e apenas relativas a pormenores de escrita e nunca ao significado das declarações prestadas. Importa ter em conta que, não sendo o guião do conhecimento prévio de cada entrevistado, o discurso oral obtido em cada uma das entrevistas realizadas não constitui um produto acabado nem previamente estruturado ou pensado, mas sim o resultado de um processo de elaboração mental, desenvolvido no momento, com tudo o que isso envolve de incoerências, lacunas, imperfeições e hesitações.

Alguns dos professores referiram que a entrevista oral quando passada à forma de discurso escrito, tal qual como foi 'falada', parecia estranha. Como salientaram, não estavam presentes nas transcrições os gestos, os sorrisos, as entoações, os ritmos... enfim, muitas das componentes que, para lá das palavras, dão vida à oralidade.

2.4 - Planificação da análise dos dados

Como foi já referido, as entrevistas foram audio registadas e integralmente transcritas pelo investigador. Esta transcrição permitiu, sobretudo, um reviver das entrevistas realizadas, revelando-se este primeiro momento de contacto mais profundo com os dados particularmente útil na identificação de possíveis linhas de análise. Os dados recolhidos foram objecto de análise de conteúdo.

Actualmente, e de um modo geral, designa-se por análise de conteúdo "um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens" (19).

Por inferência entende-se "uma operação lógica pela qual se admite uma proposição em virtude da sua ligação com outras proposições já aceites como verdadeiras" (20). Na análise de conteúdo, se a descrição (enumeração das características do texto, resumida após tratamento) é a primeira etapa necessária à análise e se a interpretação (a significação concedida a estas características) é a ultima fase, a inferência é o procedimento intermédio que vem permitir a passagem explícita de uma à outra.

Fundamentalmente, a opção metodológica por esta abordagem prende-se com a articulação entre o desejo de rigor na investigação em curso e a necessidade de "descobrir, adivinhar, ir além das aparências" (21) ou, como referem Durkheim, Bourdieu e Bachelard, de "dizer não à ilusão da transparência dos factos sociais recusando ou tentando afastar os perigos da compreensão espontânea" (22).

Primeira fase de análise dos dados: Como primeiro pólo cronológico da análise de conteúdo, Bardin refere a fase de *pré-análise* indicando que esta fase corresponde a um período de intuições, tendo por objectivo a organização, embora seja composta por actividades não estruturadas, abertas, por oposição à exploração sistemática dos documentos (23). Essencial na fase de pré-análise é a organização do conjunto dos documentos a ter em conta para serem submetidos a procedimentos de análise, isto é, a constituição do *corpus* (24).

Na presente investigação, após a devolução, pelos professores entrevistados, das transcrições que lhes tinham sido entregues, considerou-se, pelas razões anteriormente indicadas, que o *corpus* seria constituído pelas transcrições totais das entrevistas realizadas com os professores Artur, Beatriz, Eloísa e Filipa. Estas transcrições foram, em seguida, agrupadas em quatro conjuntos, cada um dos quais formado pelas transcrições das duas entrevistas realizadas com cada um destes professores.

Uma vez já estabelecidos os objectivos da investigação e obtido o *corpus* a analisar, procedeu-se à *leitura flutuante* de cada um desses quatro conjuntos. Bardin descreve esta leitura, fundamental à fase de pré-análise dos dados, como "intuitiva, muito aberta a todas as ideias, reflexões, hipóteses, uma espécie de 'brain storming' individual" (25).

Foi a leitura flutuante das transcrições que, interagindo com o corpo teórico apresentado neste estudo e com os objectivos da presente investigação, sugeriu *temas* que permitiram, posteriormente, uma análise mais detalhada das entrevistas.

A palavra *tema* é aqui utilizada com o sentido de uma afirmação acerca de um assunto. Poderá ser uma frase, uma frase composta, um resumo, uma frase condensada, por influência da qual pode ser afectado um vasto conjunto de formulações singulares. Fazer uma análise temática consiste em descobrir "os núcleos de sentido que compõem a comunicação" (26).

Alguns dos temas encontrados a partir da leitura das transcrições, em virtude dos caracteres comuns entre eles, foram agrupados em classes denominadas categorias. Estas categorias, que não foram, pois, estabelecidas anteriormente à realização das entrevistas, são temáticas uma vez que o critério de categorização foi semântico (27).

Posteriormente à identificação das categorias, cada um dos quatro conjuntos de transcrições foi analisado de acordo com o procedimento seguinte:

• levantamento efectuado por ordem cronológica de todas as informações prestadas pelo entrevistado relativamente a cada uma das categorias estabelecidas; sempre que foi considerado necessário ou aconselhável foram geradas novas categorias (28).

• constituição, para cada professor e para cada categoria, de pequenos *dossiers* compostos pelas informações anteriormente assinaladas;

• avaliação da relevância de cada um destes *dossiers* no contexto da globalidade das duas entrevistas realizadas com o respectivo professor;

• análise de cada *dossier* com o objectivo de compreender, relativamente a cada professor, as suas *representações pessoais* sobre o objecto deste *dossier*.

A análise das entrevistas foi orientada pelas categorias que a seguir se apresentam.

I - <u>Enquadramento profissional e perspectiva de ensino do professor</u>

1 - Percurso profissional

2 - A matemática na vida do professor (relação enquanto aluno, perspectiva enquanto professor)

II- Filosofia pessoal sobre a matemática

1 - Origem e natureza da matemática

2 - Produção do saber matemático

III - Resolução de problemas em educação matemática

1 - Problema de matemática

2 - Resolução de problemas em contextos escolares

Foi a partir destas categorias que se procedeu a uma análise mais profunda dos dados recolhidos junto dos professores entrevistados. Esta análise constitui o objecto da próxima secção deste capítulo.

3 - Descrição e interpretação dos dados

Nesta secção serão descritos e interpretados alguns dos dados recolhidos através de oito entrevistas semi-estruturadas realizadas junto de um conjunto de quatro professores de matemática que leccionam esta disciplina ao nível do terceiro Ciclo do Ensino Básico ou Ensino Secundário.

O objectivo desta secção é pesquisar e compreender as *representações pedagógicas* desses professores relativas à resolução de problemas, bem como evidenciar a diversidade de sentidos que poderão estar subjacentes aos termos *problema* e *resolução de problemas* no âmbito da educação matemática. É ainda procurar possíveis relações entre representações pedagógicas e *filosofias pessoais* sobre a matemática sustentadas por esses professores.

O Quadro VIII, a seguir apresentado, constitui o quadro de leitura do *corpus* e foi elaborado a partir das categorias de análise referidas na secção anterior deste capítulo.

Quadro de leitura do *corpus*			Incluir, por exemplo, referências a:
I Enquadramento profissional e perspectiva de ensino do professor	1 - Percurso Profissional	1.1 - Ingresso na profissão	• Como e porquê professor de matemática.
		1.2 - Relação com a profissão	• Preferências, dificuldades, imagens.
	2 - A matemática na vida do professor	2.1 - Relação enquanto aluno	• Aspectos relacionados com a experiência dc professor enquanto aluno de matemática.
		2.2 - Perspectiva enquanto professor: -relevância da matemática escolar; -natureza e organização dos ambientes de ensino para a aprendizagem da matemática; -a actividade mat.	• Finalidades, importância, justificação; • papel do professor, papel do aluno; • actividades de ensino desenvolvidas e/ou que importa desenvolver; • aula de matemática 'típica'; • significado de fazer matemática; • o que o aluno deve fazer para aprender matemática
II Filosofia pessoal sobre matemática	1 - Origem e natureza da matemática		• O que é a matemática; • papel da descoberta e invenção em matemática; • atributos da mat. enquanto ciência; • características que permitem (ou não) distinguir a matemática das outras ciências; • perspectivas sobre a certeza, falibilidade e rigor em matemática; • perspectivas sobre a face lógica e/ou extra-lógica da matemática.
	2 - Produção do saber matemático		• Carácter estático e/ou dinâmico da mat.; • porquê, como, quem produz saber mat.
III Resolução de problemas em educação matemática	1 - Problema de matemática	1.1- Natureza	• Exemplos, significado; • carácter (objectivo, subjectivo, rotineiro, não rotineiro, relativo, etc.); • tempo(s) de resolução
		1.2- Funções	• Problemas que os alunos devem ser capazes de resolver; • problemas que importa trabalhar na sala de aula.
	2 - Resolução de problemas em contextos escolares	2.1 - Natureza e relevância	• Exemplos, significado • carácter; • finalidades, importância, justificação.
		2.3 - Actividades de ensino	• Papel da resolução de problemas; • O que fazem os alunos e professor nas aulas de resolução de problemas; • como importa trabalhar resolução de problemas na sala de aula: - papel do professor, actividade do aluno; - actividades pedagógicas; - ambiente da sala de aula.
		2.4 - Trabalho em torno de resolução de problemas	• Significado; • relevância; • viabilidade; • dificuldades.

Quadro VIII

Foi a partir do quadro VIII que se obteve a descrição, resumida após tratamento, dos dados considerados relevantes para a presente investigação. É apresentada, em seguida, uma síntese interpretativa dessa descrição, organizada, relativamente a cada professor, em torno de três eixos:

- Enquadramento profissional e perspectiva sobre o ensino;
- Filosofia pessoal sobre matemática;
- O sentido de resolução de problemas em educação matemática.

Dado que esta síntese se pretendia breve, não se incluem aí muitas das evidências empíricas, constituídas por extractos das entrevistas realizadas, que conduziram à caracterização das *representações pessoais* dos professores sobre os temas em estudo. Sempre que houve necessidade de incluir alguns desses extractos, estes foram identificados colocando-se, a seguir a ele, um parêntesis com a inicial do pseudónimo atribuído a cada entrevistado, seguida do número de página onde esta se encontra no anexo 2 (29). Algumas das declarações incluídas na análise apresentada são, igualmente, seguidas da indicação do número das páginas onde se encontrou algum do suporte empírico para a sua afirmação.

A pesquisa de relações entre as *filosofias pessoais* sobre a matemática sustentadas pelos professores participantes neste estudo e as suas *representações pedagógicas* sobre resolução de problemas será apresentada na conclusão da terceira parte deste trabalho.

3.1 - Professor Artur

Enquadramento profissional e perspectiva sobre o ensino

Percurso profissional: Artur é um professor profissionalizado que dá aulas há mais de doze anos e para quem o ensino não foi uma linha orientadora do seu percurso académico. Bacharel em Engenharia de Máquinas, começou por leccionar Mecanotecnia (Grupo 2º A) em 1978, um período que nas suas palavras "não precisa de mais adjectivos" (A,3) quando se pensa na possibilidade de colocação profissional na área de engenharia:

> "tomaram os que estavam empregados que os seus empregos não lhes fechassem as portas e não fossem despedidos, quanto mais ainda arranjar situação. Portanto, tive aquela saída" (A,3).

Posteriormente, ainda procurou outra via profissional que não o ensino mas, devido a motivos vários, tal não foi possível. Assim, ao longo da sua vida, teve como única profissão ser professor.

A experiência inicial como professor de matemática ocorreu passados cerca de três anos e deveu-se, fundamentalmente, a dois factos complementares. O primeiro relacionado com a redução, naquele período, do número de alunos dos grupos técnicos, especialmente na área de mecanotecnia. Esta redução conduzia a que, nalguns casos, fosse mais compensatório leccionar matemática, embora com habilitação suficiente e vencimento inferior, do que ser professor no grupo disciplinar para o qual se possuía habilitação própria:

> "Um indivíduo nunca conseguia ficar próximo de casa. Ora, com a habilitação suficiente, e devido à falta de professores de matemática, um indivíduo estava (...) onde queria" (A,2).

O segundo facto prendeu-se com a existência, naquela época, de um curto espaço de tempo em que foi concedida habilitação própria aos bacharéis e licenciados em engenharia para leccionar a disciplina de matemática (ao nível do actual terceiro Ciclo do Ensino Básico e Ensino Secundário) o que possibilitava o ingresso na profissionalização em exercício nesse grupo disciplinar. Nessa altura, e com grande surpresa sua, o professor Artur entrou em profissionalização sem nunca ter dado aulas de matemática:

> "Nunca acreditei que tivesse entrado. E não liguei (...) nem fui ver as listas nem nada (...) uma bela sexta-feira telefona-me uma colega (...) tu entraste na profissionalização" (A,2).

Sendo professor, em parte devido 'à força das circunstâncias', como ele próprio afirma, o gosto pelo ensino em geral e pelo ensino da matemática em particular não constituíram determinantes no seu ingresso na profissão de professor. Nesta profissão preocupa-se em ser honesto e em manter uma boa relação com os alunos:

> "nunca experimentei outra profissão (...) acabo por não ter termo de comparação (...) Isto tem as suas partes aborrecidas (...) mas é um modo de vida como qualquer outro em que a pessoa tem que o enfrentar e tentar ser honesto no que faz" (A,3).

A matemática na vida do professor: Na descrição da sua experiência como aluno não se detecta um gosto ou relação especial com a matemática:

> "Eu tive flutuações na disciplina. Houve anos em que me entendi melhor com aquilo do que noutros. É óbvio que nos anos em que não me entendi era uma 'estopada'" (A,6).

Relacionando a sua experiência discente com os ambientes de ensino que actualmente procura proporcionar aos seus alunos para que estes possam aprender matemática, Artur salienta, sobretudo, as alterações ocorridas nas relações professor-aluno e a maior "serenidade na introdução dos assuntos" (A,5). Esta "serenidade" provém da possibilidade do professor chegar ao fim do ano lectivo e poder declarar a matéria leccionada, o que o liberta do "programa rígido que (...) tinha mesmo que cumprir" (A,5):

> "as aulas hoje não são propriamente aulas... São uma certa familiaridade... Tudo corre dentro de um clima que se procura que seja aberto caso os alunos não enveredem por outros caminhos... em que há diálogo, em que as coisas são postas com toda a calma, com toda a serenidade (...) há escolas que ainda continuam sempre com aquela coisa de ter de se cumprir o programa seja de que maneira for...(...) Eu pelas escolas por onde tenho andado não tem sido esse o modo de funcionamento do grupo" (A,5).

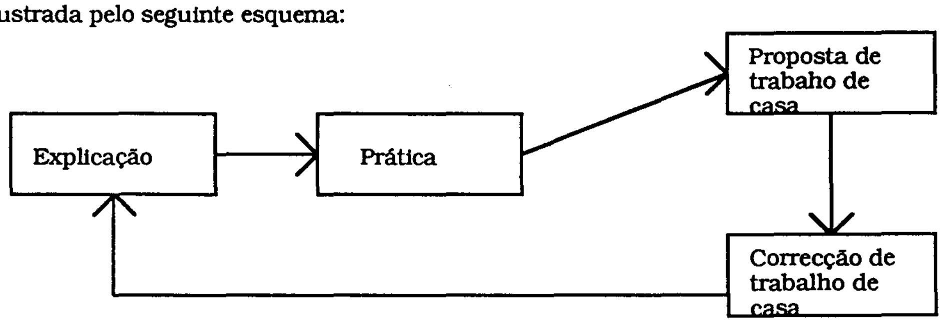
A 'liberdade' que o professor experimenta relativamente ao programa parece, contudo, nem sempre ser possível para Artur. Se por um lado este não tem que ser "rigorosamente cumprido" (A,40), o que possibilita a referida serenidade, por outro o programa é encarado como "uma determinante (...) [que] não pode ser levado a belo prazer de cada um ou pela perspectiva que cada um tem da matemática" (A,40). Estará esta ambivalência relacionada com a importância que este professor parece conceder à hierarquia e sequência - na matemática, no curso, no programa, no ensino e aprendizagem?

De facto, na perspectiva de Artur, um aluno para aprender matemática deve "começar primeiro pelas bases" (A,8), pois considera que, muitas vezes, o insucesso e desinteresse são resultantes "precisamente da falta de bases" (A,8); um aluno com dificuldades deverá ser aconselhado a "ver quais são as carências, os pré-requisitos" (A,8) e não é fácil ao professor de matemática mexer no programa a seu "belo prazer sem correr o tal risco de depois [ficar] com uma grande 'caldeirada' em vez de uma sequência (A,38); o professor deve ter "determinado cuidado [com] os assuntos fundamentais para a sequência do curso" (A,11) e procurar "criar umas determinadas bases para a sequência na disciplina" (A,11).

Na descrição do ensino da matemática típico, elaborada por Artur com base nas aulas que ele próprio organiza e nas aulas das pessoas que conhece, destaca-se, relativamente à estrutura, uma vertente de uniformidade. Esta vertente apresenta semelhanças com as aulas de matemática que teve enquanto aluno :

> "os assuntos são explicados... lá está de uma maneira diferente. Depois há a componente prática que (...) constitui os trabalhos de casa. No outro dia corrigem-se... com calma... tenta-se explorar o máximo de exercícios possível (...) Dentro dessa linha a coisa acaba por funcionar com certos pontos de contacto" (A,7).

Deste modo, para Artur a lógica de organização dos ambientes de ensino na sala de aula de matemática parece seguir uma rotina que, na generalidade dos casos, pode ser ilustrada pelo seguinte esquema:



Esta rotina apenas é quebrada nos dias em que, por diversos motivos, não há "tempo para passar o trabalho de casa" (A,7). Nesse caso, no dia seguinte "o que havia de ser feito em casa terá que ser feito na aula: resolução de exercícios, acompanhamento..." (A,7).

Surgem, assim, dois tipos de aulas de matemática: (a) as que seguem o padrão: correcção trabalho de casa -> introdução/explicação de conteúdos matemáticos -> proposta de novo trabalho de casa e (b) as aulas de resolução de exercícios.

Em ambos os casos, cabe a Artur introduzir, explicar e, se necessário, (re)explicar os conteúdos disciplinares que constituem o programa de matemática e modelar o comportamento pretendido para os alunos; pôr o "quadro à disposição" (A,13,43) para os alunos que quiserem aí poderem corrigir os exercícios que lhes foram propostos; acompanhar os alunos que estão interessados durante o processo de resolução, tornando as "passagens" (A,13), que são feitas no quadro, acessíveis à generalidade da turma; e evitar que quem não quer aprender, perturbe quem o deseja.

Nas aulas "nada é feito de ocasião" (A,16) por Artur, pois estas vão preparadas e os exercícios são previamente resolvidos; aí, o aluno deverá seguir as indicações que ele lhe for dando. Refira-se que, no Ensino Unificado, é o próprio Artur quem indica, nomeadamente, o momento em que o aluno deve registar a informação matemática no seu caderno e dita o conteúdo dessa informação:

> "nós damos um registo das lições (...) A pessoa diz: agora vamos tomar o nosso apontamento (...) o aluno escreve o apontamento que nós ditamos, o registo, a informação (...) têm lá tudo: têm as definições, têm a explicação da matéria, têm os exercícios propostos, os exercícios resolvidos e essa coisa toda" (A,27, 28).

Assim sendo, o papel do professor consiste em apresentar o conteúdo matemático de uma maneira clara e precisa, bem como programar, dirigir e controlar todas as actividades de ensino.

Para Artur, a relevância do ensino e aprendizagem da matemática parece, fundamentalmente, prender-se com a utilidade desta disciplina na preparação dos alunos para a sua vida futura, seja vida profissional, sejam estudos matemáticos:

> "Talvez o aprender matemática seja determinado pelos próprios currículos. E depois numa perspectiva de seguir (...) o estudo da matemática pensando na Escola é uma consequência do objectivo que o aluno tem para a sua vida futura" (A,38).

Neste âmbito, sobressai a ênfase, por ele concedida, ao ensino e aprendizagem de regras e procedimentos de cálculo, parecendo evidenciar-se a perspectiva que um aluno sabe matemática quando é capaz de seguir regras e dar respostas utilizando procedimentos matemáticos modelados pelo professor. Esta ênfase ressalta, nomeadamente, a partir dos exemplos que Artur escolhe para ilustrar vertentes do programa de matemática que constituem motivo das suas preocupações fundamentais relativamente ao ensino (A,11,17,53,55,56,57).

Pelo que foi referido, parece estarmos perante um professor que prepara as actividades de aprendizagem privilegiando a sequência (da disciplina, do programa, do curso) e procurando que estas se desenrolem em ambientes de ensino caracterizados pela honestidade, serenidade, familiaridade e clima de abertura. Neste contexto, para Artur, o crescimento matemático dos alunos parece depender, antes de mais, da prática de resolução de exercícios. Nessa medida, e utilizando uma metáfora proposta por Guimarães (30), privilegia a sua função de "professor-treinador", cuidando para que as actividades de ensino que organiza para os seus alunos enquadrem, fundamentalmente, momentos em que estes se possam exercitar.

Se seguirmos os modelos para o ensino da matemática, identificados por Kuhs e Ball (31), parece poder dizer-se que as *representações pessoais* de Artur sobre a natureza do ensino e aprendizagem da matemática em contextos escolares, se enquadram, globalmente, em *perspectivas de ensino focadas no conteúdo com ênfase no desempenho.*

Filosofia pessoal sobre a matemática

Durante as entrevistas realizadas com Artur houve, por diversas vezes, tendência, da sua parte, para restringir a matemática à sua dimensão de disciplina escolar, ficando-se, frequentemente, com a ideia de que reflectir sobre matemática, enquanto ciência, não tem sido objecto das suas preocupações profissionais prioritárias (A,18,19,20,32,33,34).

No entanto, para este professor "não há dúvida" (A,20), como ele próprio refere, que a matemática constitui "uma ciência rigorosa, muito abstracta, [que] prima pelo seu rigor e por uma grande dose de abstracção" (A,20). Na sua perspectiva, a matemática é objectiva e identifica-se com uma ciência dedutiva; tratando-se de uma ciência exacta, o conhecimento matemático é mais certo do que o conhecimento noutros ramos do saber e, como ciência rigorosa que é, "não é susceptível de erros" (A,36).

Tudo parece indicar que Artur olha a matemática segundo um ângulo que privilegia fortemente o seu lado lógico. Esta ideia é reforçada quando se constata o papel secundário que este professor concede à intuição que, relativamente ao ensino, tende a identificar com "a disposição natural do aluno (...) ou queda" (A,23), bem como a afirmação, várias vezes repetida, que a matemática é "uma coisa fria" (A,22), onde não tem muito sentido falar em beleza.

Quanto à produção do saber matemático, Artur refere que a matemática não é "algo que caia do céu" (A,22). Indica que os novos conceitos matemáticos se formam à custa da investigação desenvolvida com base em princípios anteriores, e aponta como consequência recente do desenvolvimento da matemática, "o grande desenvolvimento da informática" (A,34).

Além disso, este professor indica que a matemática constitui um sistema em expansão que se descobre, pois para ele "está tudo inventado" (A,34), e onde as "coisas (...) estão devidamente entrosadas e não funcionam isoladamente" (A,21). Neste âmbito, a resolução de problemas constitui "a sequência prática da disciplina ou ciência" (A,45).

O reconhecimento de que há novo conhecimento matemático, que é constantemente desenvolvido a partir da actividade humana, poderá levantar a questão de se a *filosofia pessoal* sobre a matemática, sustentada por este professor, não se enquadrará no que Ernest designa por *filosofia absolutista progressista* (32).

No entanto, a identificação da matemática com um corpo de conhecimento certo, rigoroso, objectivo e dedutivo, aliada à ênfase colocada na exclusividade da descoberta como forma de produção do novo conhecimento matemático (o que na perspectiva do professor, embora não explicitamente reconhecido, poderá estar associado à natureza fixa desse corpo), permite colocar a hipótese da sua *filosofia pessoal* sobre a matemática ir mais no sentido do *absolutismo*, utilizando ainda a caracterização proposta por Ernest. Esta hipótese é reforçada ao pensar-se no lugar privilegiado que Artur concede a regras e procedimentos de cálculo, bem como à importância que atribui à sequência e hierarquia na organização das actividades de ensino que pensa para os seus alunos.

O sentido de resolução de problemas em educação matemática

Problema de matemática: Para Artur problemas são todas as propostas de trabalho que obedecem a uma resolução; em que "há um princípio que é o enunciado, há um fim que é o que se pretende, que é a resposta e há um meio que é a resolução" (A,51). Consistentemente, este professor utiliza, indistintamente, e na generalidade dos casos, os termos exercício e problema, parecendo considerá-los sinónimos (A,11,13,14,15,29,46,51), e de entre várias propostas de trabalho incluídas no anexo A (33) e que lhe foram apresentadas, apenas rejeita, como sendo um problema, aquela que não faz propriamente uma pergunta" (A,50).

Em Março, durante a primeira entrevista, como exemplo concreto de um problema de matemática refere:

> "Um exercício (...) se for neste momento no nono ano, os radicais, por exemplo, as potências, sistemas..." (A,11).

Quando se tentou clarificar como interpretava Artur um exercício de potências no 9º ano, questionando-o se se estava a referir, por exemplo, a questões do tipo "calcula $(\frac{1}{2})^{-3} \times (\frac{1}{2})^{2}$" respondeu:

> "Exactamente. Ou por outra, em que intervenham as regras de operações com potências, pronto" (A,11).

Por vezes, esboça-se uma distinção entre problemas/exercícios e 'outros problemas'. Nomeadamente, ao analisar as propostas de trabalho incluídas no anexo A, Artur referiu que "há aqui um conceito do chamado exercício de matemática que incide sobre uma determinada matéria e depois há aquele chamado (...) problema da vida prática" (A,49). Como exemplos de problemas da vida prática indica questões colocadas a partir da descrição de situações relacionadas com a vida do dia a dia. Refere ainda os "problemazinhos de desenvolvimento de raciocínio" (A,40), na sua perspectiva não directamente relacionados com o programa de matemática, que designa por "situações tipo charadas (...) aquelas descobertas" (A,40), "as tais charadas (...) as tais descobertas" (A,49).

Relativamente a estes últimos problemas, salienta, por um lado, que a sua resolução, durante o tempo lectivo, é questionável, pois torna difícil o cumprimento do programa de matemática ao reduzir o tempo necessário ao ensino dos conteúdos matemáticos aí incluídos; por outro lado, indica que "não são acessíveis à maioria dos alunos da turma e então o desenvolvimento será para o mínimo dos mínimos dos alunos presentes" (A,40).

Para Artur, a função dos problemas/exercícios, no âmbito da matemática escolar, é tentar criar umas determinadas bases para a sequência na disciplina (A,11). Assim, considera que devem privilegiar-se aqueles que sejam importantes para a "sequência na cadeira" (A,17) como acontece, na sua perspectiva e por exemplo no 8º ano, com os sistemas de equações, casos notáveis e factorização.

Também ao analisar as propostas de trabalho incluídas no anexo A opta pelas questões "que estão vinculadas ao programa (...) até para manter uma homogeneidade no cálculo e, vá lá, até a nível de alunos" (A,48).

É de notar, contudo, que apesar da ênfase concedida por Artur às propostas de trabalho "que estão ligadas aos conteúdos programáticos, às unidades didácticas" (A,53), este professor não reconhece a todas estas a mesma importância nem as privilegia de igual modo. Parece colocar, claramente, uma ênfase especial nas que envolvem o treino de procedimentos de cálculo.

De facto, e em primeiro lugar, referindo-se ao *problema dos discos* apresentado no anexo B (34), indica que "pelo menos nas aulas não [tem] tempo para explorar questões deste tipo" (A,60). Além disso, quando lhe foi perguntado quais das propostas de trabalho, apresentadas no anexo A, trabalharia preferencialmente com os seus alunos, a única que escolhe, prontamente e sem qualquer margem de dúvida, é a A8, proposta esta que envolve a aplicação directa de regras de potenciação:

- "o A8 esse então não há que discutir..." (A,53)

- "O A8 faz parte mesmo. Não se pode dar o estudo da unidade por concluído sem entrar em exercícios deste tipo ou outros até mais trabalhosos" (A,58).

Em segundo lugar, a sua postura não é a mesma relativamente a A1 e A3, respectivamente um problema para equacionar e um problema para demonstrar (33), embora reconheça, explicitamente que também estas focam conteúdos matemáticos incluídos no programa de níveis de ensino do Curso Unificado:

- "é ponto assente (...) a manifesta dificuldade que os alunos têm em situações como o A1. Ora em função disso e dado que nesta matéria não há regras, não há como que um apontamento que nós possamos dar aos alunos e que seria a solução de todos os problemas (...) é uma matéria que embora não passe em vão, não lhe dou a importância por exemplo que dou aos radicais, potências e resolução de equações do 1º, 2º grau..." (A,55, 56).

• "nós este ano combinámos dar pouca importância às demonstrações (...) voltámo-nos mais para a parte do cálculo" (A,57).

Para lá do que foi dito, no primeiro destes extractos é ainda de destacar que, embora sem o Artur lhes atribuir muita importância, os problemas para equacionar surgem, por vezes, nas actividades de ensino que selecciona e organiza. A sua apresentação aos alunos acontece, apenas, após o ensino directo de conceitos e técnicas considerados necessários à resolução.

Resolução de problemas em contextos escolares: Relativamente à resolução de problemas, Artur indica que esta consiste na resolução de uma questão que é colocada pelo professor e refere que, sendo a matemática "uma ciência exacta, importa não só que o resultado esteja correcto, mas que toda a fase de resolução seja transparente" (A,40). Cabe ao professor proporcionar essa transparência, explicando, se necessário, aquelas "passagens em que interveio o cálculo mental (...) [de modo a torná-lo] acessível à generalidade da turma" (A,41).

Neste contexto, existem na sua perspectiva "dois tipos de aulas de resolução de problemas" (A,45):

• aquelas "em que os problemas foram propostos na véspera como trabalho de casa e em que o aluno, à partida, deveria ter pensado" (A,45);

• "há outro tipo de aulas de exercícios que é quando a sequência não envolve obrigatoriamente a correcção de trabalhos de casa (porque não os houve) e portanto os exercícios têm que ser propostos na altura" (A,46).

Quer as actividades propostas para trabalho de casa, quer os exercícios propostos aos alunos na aula, são, para Artur, "do mesmo género" (A,47). A compreensão de como concebe estas actividades poderá ser iluminada pelo exemplo que apresenta, no decurso da segunda entrevista realizada em meados de Maio, como uma questão cuja resolução constitui um exemplo de resolução de problemas para os alunos do 9º ano:

> "Neste momento, dado o ângulo agudo α sabendo que senα= 3/4 calcular as restantes razões trigonométricas" (A,41).

Tal como se tinha já evidenciado anteriormente, de novo sobressai a preferência deste professor por questões explicitamente formuladas, em que é apenas requerida a aplicação de um algoritmo, e em que se espera uma só solução que o aluno pode fornecer num curto espaço de tempo e combinando os dados que lhe são fornecidos em número necessário e suficiente.

Os dois tipos de aulas de resolução de problemas, embora as actividades propostas por Artur aos alunos sejam do "mesmo género", não se revestem das mesmas características. Enquanto que "as aulas de correcção de trabalhos de casa são sempre aulas mais serenas" (A,46), quando os exercícios são propostos na altura gera-se "um burburinho maior (...) há maior discussão (...) eles procuram entre si confrontar resultados, procuram confrontar passos de resolução" (A,46).

Fica, contudo, a questão de saber se a actividade de confronto e discussão de resultados e estratégias de resolução, desenvolvida pelos alunos, constituirá uma dimensão do ensino e aprendizagem da resolução de problemas valorizada por Artur. Aparentemente, tudo parece indicar que tal não acontece:

> "existe efectivamente um burburinho maior do que no outro tipo.... e burburinho esse que por vezes, começa a tornar-se insuportável porque dizem que a discussão é salutar mas a discussão com as características que eles [alunos] lhe querem dar não pode..." (A,46).

Esta ideia é reforçada pela não referência à inclusão, nos ambientes de ensino que Artur organiza, de questões em aberto, de conjecturas das quais não se sabe à partida se são verdadeiras ou não, de situações de aprendizagem em que os alunos possam envolver-se, de uma forma autónoma e cooperativa, em actividades de pesquisa matemática. É ainda reforçada pela análise da descrição feita, por este professor, do trabalho a desenvolver com uma turma quando pretende trabalhar resolução de problemas.

O desenvolvimento deste trabalho poderá requerer que se proponham aos alunos "exercícios (...) para casa" (A,13) que depois serão corrigidos na aula. Neste contexto, o papel do professor consiste em (a) pôr o "quadro à disposição" (A,13), (b) acompanhar o aluno que quiser ir ao quadro - "Só vai quem diz (...) Só vai quem quer" (A,13) - (c) se necessário "desmanchar as passagens" (A,13) que esse aluno faz - "explico à turma a rapidez com que aquilo foi feito, às vezes até com cálculos auxiliares" (A,13) - e (d) esclarecer as dúvidas porque os alunos "lá tentar descobrir por eles é que não" (A,13). Neste contexto, não levaria para a sala de aula um problema de que não soubesse a resposta, para não permitir que fosse criada uma situação em que um aluno, no quadro, chegasse a um resultado errado que, por algum motivo, ele, enquanto professor, não detectasse.

Esta descrição adapta-se, sem grandes alterações, ao que representa para Artur trabalhar com os alunos em torno de resolução de problemas. De facto, este professor apenas acrescenta que esse trabalho envolve também a selecção das questões a colocar aos alunos. Na sua perspectiva, essa selecção deve ser feita de modo a rejeitar problemas inviáveis - como é, para ele, o caso de um enunciado "dizer que o senα = 7/5, determine as restantes razões trigonométricas" (A,41) - e "ser analisada em termos não só de utilidade, como também de tempo de resolução (isto no espaço aula, claro) e depois da metodologia da respectiva resolução" (A,42).

A metodologia da resolução identifica-se, para Artur, com propôr os trabalhos a realizar e providenciar a sua correcção, pondo o quadro "à disposição" (A,43). Este último traço, que parece fazer parte intrínseca da organização de todas as suas actividades de ensino, e não apenas do trabalho em torno de resolução de problemas, parece revestir-se de uma importância especial na forma como concebe a sua actividade de professor de matemática.

De facto, para lá de se lhe ter referido, por diversas vezes, ao longo das duas entrevistas realizadas, fez questão de, já posteriormente à realização da primeira parte da segunda entrevista, explicar, mais uma vez, a justificação de tal procedimento. Esta justificação prende-se, fundamentalmente, com duas ordens de razões: segundo Artur, por um lado, há alunos que são tímidos, que não gostam de ir ao quadro, tal como ele próprio não gostava e que, por isso, não devem ser forçados a fazê-lo; por outro lado, por uma questão de eficácia e rentabilização do tempo lectivo:

> "há alunos que não conseguem fazer nada de nada (...) não proíbo esses alunos de irem ao quadro, mas também o aluno que não sabe nada de nada (...) também não posso estar a tê-lo ali um quarto de hora, dez minutos, vinte minutos a resolver uma questão, que depois na prática quem acaba por a resolver somos nós e que se resolveria em sete ou oito minutos" (A,42,43).

O tempo que um aluno demora na sala de aula com a resolução de um problema parece ser indiciador, para Artur, da capacidade de resolução de problemas desse aluno:

> "a capacidade de resolver problemas (...) pode envolver um certo ritmo (...) um aluno resolver um problema em dois minutos e outro em três minutos e meio não é nada de alarmante. Ambos atingiram o mesmo objectivo. Claro que, numa aula, é óbvio que um problema que pode demorar três minutos a resolver, se houver um aluno que demore um quarto de hora (claro que isto já no campo do exagero) aqui já há sérias diferenças" (A,44).

Interpretando preferencialmente os problemas como exercícios que se seguem às explicações do professor, é natural que Artur atribua à resolução de problemas, no âmbito do ensino e aprendizagem da matemática, "Um papel de muito relevo" (A,45). Com efeito, para este professor, a resolução de problemas constitui "a sequência prática da disciplina ou da ciência" (A,45) e, uma vez que "o aspecto prático tem um peso muito grande no ensino da matemática" (A,45), não há dúvida que a resolução de problemas é o eixo organizador do ensino da matemática:

> "se toda a parte teórica que nós leccionamos tem a sua consecução prática, pois, não há dúvida que a resolução de problemas é o eixo organizador do ensino da matemática (...) não pode haver prática sem teoria e vice-versa" (A,45).

Ao longo das duas entrevistas realizadas, não se vislumbra qualquer indício de interpretação da resolução de problemas em termos de processo de aprendizagem ou de abordagem pedagógica a adoptar relativamente ao currículo escolar de matemática.

Da análise anteriormente desenvolvida, sobressaem alguns vectores, relativos às *representações pedagógicas* de Artur, sobre resolução de problemas.

Em primeiro lugar, evidencia-se a utilização, quase indiferenciada, das palavras exercício e problema, não sendo óbvio que este professor esteja desperto para a natureza subjectiva e o carácter não rotineiro e relativo de um problema de matemática.

Para Artur, os problemas/exercícios são questões de resposta curta, propostas (e impostas) pelo professor, que devem ser resolvidas pelos alunos num curto espaço de tempo, que constituem a componente prática do ensino da matemática e que se seguem, inevitavelmente, à exposição de conteúdos matemáticos feita pelo professor.

Nas actividades de ensino que adopta, parece rejeitar os problemas enquanto objectos de pesquisa.

Assim, Artur interpreta a resolução de problemas/exercícios como a prática necessária para proporcionar e reforçar a aprendizagem de conceitos e procedimentos matemáticos anteriormente explicados e modelados pelo professor. Quando diferencia os exercícios de problemas, como acontece, por exemplo, com problemas para equacionar, a estes fica reservado, exclusivamente, o papel de prática, seguindo a categorização proposta por Stanic e Kilpatrick (35).

Considerando a matemática escolar fundamentalmente orientada pelos conteúdos, e considerando que a sua principal função é a de promover a aquisição de competências matemáticas, que serão úteis ao aluno na sua vida académica ou na sua vida profissional futura, Artur privilegia a resolução de problemas/exercícios directamente relacionados com conteúdos matemáticos incluídos no programa e que tenham utilidade para a sequência dos estudos.

Deste modo, os problemas/exercícios com este professor, poderão talvez cumprir, pelo menos parcialmente, a sua função de ensino (uma vez que possibilitam que os alunos se confrontem "com uma situação matemática, na qual se incluem determinados conhecimentos sob a forma de termos, expressões matemáticas, relações quantitativas, operações matemáticas, etc. que são necessários aplicar ou realizar para obter as respostas" (36)), mas, dificilmente, a sua função educativa ou de desenvolvimento.

3.2 - Professora Beatriz

Enquadramento profissional e perspectiva sobre o ensino

Percurso profissional: Beatriz possui, como formação de base, uma Licenciatura em Matemática, Ramo Educacional. Professora efectiva há cerca de onze anos, gosta da profissão que escolheu, encarando-a hoje um "bocado tipo sacerdócio" (B,64). Ainda em criança já o ensino se lhe apresentava como uma opção profissional com fortes atractivos a que, ainda nessa época, aderiu:

> "a minha mãe brincava muito comigo porque dizia que eu gostava de dar aulas às bonecas; (...) eu já gostava de transmitir alguma coisa. (...) e como eu gostava realmente era de matemática, fui. E pronto, achava que devia ser giro lidar com crianças" (B,63).

A matemática na vida da professora: O gosto pela matemática tem também raízes que remontam aos tempos de infância, pelo menos até à Escola Primária. Da sua experiência enquanto aluna, recorda-se que, nessa altura, "gostava de fazer contas" (B,64), gostava de poder ver "o que se está a fazer" (B,64) sem ter que decorar, achava "que era engraçado" (B,65).

Enquanto professora ensina matemática porque gosta e "porque [pensa] que se transmite alguma coisa de útil" (B,92). Esta utilidade aparece relacionada com a vida académica dos alunos, bem como com o seu ingresso sua vida profissional futura:

> "[ensino matemática] para os alunos consolidarem os seus conhecimentos e mais tarde, se calhar, terem a sua vida profissional, relacionada com a matemática ou não" (B,92).

Na perspectiva de Beatriz, para lá da utilidade futura, a aprendizagem da matemática tem também muita importância para o desenvolvimento cognitivo do aluno, nomeadamente para o desenvolvimento do seu raciocínio:

> "o aluno (...) tem realmente que aprender matemática. Para quê? Penso que para desenvolver o seu raciocínio e porque a matemática é precisa em muitas coisas. Hoje em dia praticamente em tudo" (B,91).

Como professora de matemática, pensa que poderia contribuir para o desenvolvimento pleno e harmonioso dos alunos, para a formação de cidadãos responsáveis, autónomos, solidários e críticos, como visa a Lei de Bases do Sistema Educativo português, ensinando aos alunos que "a matemática é, fundamentalmente, saber raciocinar (...) saber analisar as coisas, e a raciocinarem à base dos problemas e dos exercícios que lhes são dados" (B,91).

Sendo reconhecido o desenvolvimento do raciocínio como uma dimensão fundamental da aprendizagem da matemática, fica a questão de como perspectivará Beatriz o seu papel quando pretende ajudar os alunos a raciocinar:

> "O meu papel no fundo é ensinar-lhes os conceitos básicos o mais claro possível para eles tentarem resolver determinadas situações. E depois tentar detectar as dúvidas e as falhas deles e ajudá-los nesse sentido" (B,78).

Neste processo, Beatriz tenta que sejam os próprios alunos a pensar no porquê dos erros que fazem, pois considera que o erro "É uma forma de no fundo eles também aprenderem" (B,78).

Vendo a matemática que se ensina, como "uma descoberta que se vai fazendo, que se vai tentando fazer aos alunos" (B,82), Beatriz considera que o trabalho do professor se aproxima do trabalho do aluno, pois ambos têm que desenvolver um determinado raciocínio: o professor, que "já sabe onde quer chegar" (B,77), deve ajudar o aluno a descobrir o saber matemático; este, por seu lado, "tem que tentar descobrir [esse saber] ajudado pelo professor (B,77).

Consistentemente com o que foi dito, Beatriz indica que "o ensinar matemática é transmitir-lhes [aos alunos] novos conhecimentos e maneiras de eles poderem resolver determinado tipo de exercícios" (B,92).

Estes exercícios aparecem como a sequência natural do "bocadinho de teoria" (B,67) que o professor "dá" (B,67), e podem ser resolvidos pelos alunos no quadro ou então nos seus lugares:

> "Porque, no fundo, a pessoa dá um bocadinho de teoria e depois os alunos vão fazer... E o trabalharem também nos seus lugares" (B,67).

Deste modo, para Beatriz, uma aula de matemática parece seguir o padrão: explicação —> resolução de exercícios. A resolução de exercícios, no quadro, feita pelos alunos, é considerada como a actividade típica das aulas de matemática. Resolver exercícios é também referida como a actividade típica para aprender matemática, embora Beatriz indique que resolver exercícios é apenas uma parte do que significa saber matemática. Como justificação apresenta que, através da resolução de muitos exercícios, os alunos poderão memorizar regras, mas que esta memorização não conduz, necessariamente, a que saibam aplicar essas regras a novas situações:

> "É uma parte, porque às vezes eles sabem muito [resolver exercícios] e depois se a gente lhes apresenta a expressão com outro aspecto já não são capazes de sair dali, não é? É uma parte" (B,68).

Nos ambientes de ensino que Beatriz organiza, considera fundamental o clima de empatia e à vontade criado na sala de aula. Esta ideia transparece, por exemplo, nas considerações que tece sobre a ida dos alunos ao quadro:

> "no nosso tempo, havia um bocado aquela história de medo de ir ao quadro... se se fazia mal... o professor também começava logo a dizer coisas... Agora não... Então para miúdos mais pequenos, aquilo de ir ao quadro!!!... Se não vão durante uma semana quase que ficam zangados com a professora" (B,67).

A mesma ideia é reforçada pela análise da descrição que Beatriz faz da sua experiência de aluna de matemática. Aí, apenas recorda como "excepcional" (B,64) uma professora de álgebra, já da Faculdade, não apenas pela forma como ensinava, mas também pela maneira como "brincava":

> "Não éramos propriamente catraios mas brincava connosco e fazia-nos realmente estar ali presos" (B,64).

A referida ideia surge ainda quando Beatriz hoje lamenta que, por vezes, alguns dos "professores mais novos (...) não [desculpem] as brincadeiras dos alunos" (B,67); na sua perspectiva elas são salutares e a aula de matemática, não se resumindo a estar a ouvir, proporciona-se a que os alunos "brinquem" uns com os outros:

> "Levam os miúdos muito a sério e eu acho que a gente não pode, com a vida de hoje, que não pode levar os miúdos... Pronto, eles têm que brincar e dizer coisas e a nossa aula proporciona-se muito a isso. Eles não estão ali propriamente sempre a ouvir, têm que estar a trabalhar..." (B,67).

Em resumo, Beatriz parece interpretar a sua função de professora de matemática como sendo a de ajudar os alunos a descobrir, e compreender, as ideias matemáticas. Neste âmbito, a par da importância que concede à transmissão do saber matemático, bem como à exploração dos erros dos alunos e sua integração no processo de ensino, encontra-se a importância que atribui ao clima de empatia e à vontade criado na sala de aula. Para esta professora, brincar com os alunos parece ser não menos importante do que a capacidade de transmitir o saber matemático de forma clara.

As actividades de ensino que concebe para que os seus alunos possam aprender matemática, parecem ser, simultaneamente, influenciadas pelo conteúdo matemático a ensinar e por quem aprende.

Tendo em conta tudo o que foi dito, as *representações pessoais* da Beatriz, sobre a natureza do ensino e aprendizagem da matemática em contextos escolares, parecem não se enquadrar em *perspectivas de ensino focadas em quem aprende*, seguindo a designação proposta por Kuhs e Ball e apresentada na secção anterior deste capítulo (37). Seguindo ainda Kuhs e Ball, e tendo por base os dados recolhidos através das duas entrevistas realizadas com esta professora, torna-se ainda plausível conjecturar que as suas *representações pessoais* sobre o ensino da matemática se dirijam, fundamentalmente, no sentido de *perspectivas de ensino focadas no conteúdo com ênfase na compreensão conceptual*.

Filosofia pessoal sobre a matemática

Globalmente, Beatriz respondeu sem grandes pausas e hesitações a quase todas as questões que foram colocadas ao longo das duas entrevistas, possibilitando conversar sobre algumas das vertentes relacionadas com a sua profissão de professora de matemática. Há, no entanto, uma excepção constituída por questões que se prendem com a filosofia da matemática. A título de exemplo, quando se tentou conversar sobre a actividade de produção de novo conhecimento matemático, a reacção foi imediata:

"Lá começa ela de novo com as perguntas difíceis!...(Risos)" (B,90).

A dificuldade sentida relativamente ao tema, aliada ao facto de se tornar, por vezes, não muito fácil obter um distanciamento de preocupações profissionais de natureza mais pragmática, relacionadas, nomeadamente, com a transmissão do saber matemático aos alunos, poderá ter conduzido a que, ao longo das duas entrevistas realizadas com Beatriz, as discussões sobre a matemática enquanto ciência tendessem, por diversas vezes, a resvalar para a matemática enquanto disciplina de aprendizagem na Escola.

A redução da matemática à sua dimensão de disciplina escolar, manifestou-se, por exemplo, quando se procurou compreender a perspectiva desta professora sobre o papel da descoberta e da invenção em matemática. Inicialmente, surge a afirmação de que a matemática se descobre, pois embora estejam "sempre a surgir coisas novas (...) inventada já foi" (B,82). Assim, a matemática ir-se-ia "descobrindo no dia a dia" (B,82).

No entanto, quando se procurou compreender o porquê desta afirmação, surge a resposta:

> "no fundo estudar matemática é uma descoberta que se vai fazendo (...) Também se está a inventar não é? Determinadas coisas têm que ser mesmo inventadas!... (Risos) (...) quando eles lá inventaram a geometria(...) alguém se lembrou disso, não é? É a tal história a gente não se consegue desligar da matemática que ensina" (B,82).

Aqui, parece ainda evidenciar-se um duplo posicionamento de Beatriz relativamente à actividade matemática: enquanto ciência, a matemática poderia ser inventada por alguém que não o professor de matemática ou os seus alunos -"eles lá inventaram a geometria"; o professor e os alunos descobririam, na Escola, o que já foi inventado. Assim, ficaria reservado a outros o papel de produzir, por invenção, a matemática que os professores e alunos descobririam na Escola.

Este posicionamento não é, contudo, claro no que respeita ao papel da invenção. Embora Beatriz refira que alguém se lembrou de inventar a geometria, posteriormente, ao referir-se à forma como um matemático desenvolve o seu trabalho, indica que "aqueles teoremas da geometria devem ter levado o seu tempo a descobrir" (B,90). E, quando reflecte sobre comparações por vezes estabelecidas entre teoremas matemáticos e obras de arte, de novo sobressai a descoberta associada à produção de conhecimento na área da geometria:

> "Eu acho que para os matemáticos muito matemáticos, os teoremas devem ser uma obra de arte. Sei lá, uma pessoa descobrir... como por exemplo o Pitágoras, descobrir realmente que aquilo é assim, no fundo é uma obra de arte que ele está a fazer" (B,83).

Permanece pois a questão se a matemática, enquanto ciência, é, para Beatriz, um mundo simultaneamente descoberto e inventado pelos matemáticos que investigam esta ciência, ou se, mesmo para estes, a matemática é, fundamentalmente, um mundo a descobrir.

Se Beatriz pretendesse definir a matemática de uma forma simples, como ela própria faz questão de salientar, poderia dizer que "é um conjunto de operações e de regras e de técnicas que são precisas e que servem para resolver uma data de situações e de problemas" (B,79).

A matemática distingue-se das outras ciências uma vez que "É aquilo e não há outra coisa, porque se forem estudar os animaizinhos ou a natureza, há sempre muitas coisas a influenciar e na matemática não" (B,80,81).

Esta ideia de possível imunidade da matemática a influências que lhe são exteriores parece ser reforçada pela caracterização que Beatriz apresenta para a matemática enquanto ciência objectiva:

> "Na matemática o que é, é mesmo. É o que eu costumo dizer aos alunos. O que é, é mesmo e pode-se demonstrar. Não há aqui meio termo" (B,89).

Sobre o rigor matemático, esta professora admite a hipótese de hoje poder "ter sido atingido no sentido em que a matemática se desenvolveu bastante... [e] (...) se calhar (...) cada vez é uma ciência mais exacta, porque é mesmo aquilo. É aquilo e não há outra..." (B,80).

A referência a que, em matemática, "não há meio termo", aliada à ideia de que a matemática é "mesmo aquilo e não há outra" evidenciam que, para Beatriz, o conhecimento matemático tem o que parece constituir um carácter absoluto e não ambíguo. Quererá esta afirmação significar que, para esta professora, o conhecimento matemático é infalível?

Se bem que a matemática não seja vista como "propriamente infalível" (B,83), é considerada, por Beatriz, como "mais certa que as outras ciências" (B,83), como uma ciência em que os teoremas, quando são demonstrados, são-no de uma forma rigorosa e "em princípio ficam para sempre" (B,81).

Na perspectiva desta professora, estando a matemática "ligada à vida social e cultural" (B,89), está em expansão, tal como qualquer outra ciência. Os novos conceitos matemáticos podem desenvolver-se porque há necessidade de "responder a determinado tipo de situações, problemas, exercícios..."(B,79):

> "Eu penso que devem surgir sempre de problemas que são postos às pessoas, ou de dificuldades no cálculo de qualquer coisa ou da resolução de qualquer coisa. Depois há que investigar e daí poderão sair ou não novos conceitos" (B,90).

O trabalho de um matemático consiste em pôr várias hipóteses, fazer cálculos e depois chegar a uma conclusão ou não (B,90). Neste âmbito, embora a matemática seja considerada uma ciência "fundamentalmente dedutiva" (B,83), para Beatriz "se não houver às vezes um bocadinho de intuição, se calhar custa um bocado deduzir determinadas conclusões" (B,83).

Quanto ao lugar da beleza na actividade matemática, Beatriz afirma nunca ter pensado no tema. Admite, no entanto, a existência de "qualquer coisa de beleza" (B,84):

> "Eu acho que se segui matemática, se gosto de ensinar matemática, é porque deve ter qualquer coisa de beleza. Não sei propriamente explicar o quê, mas acho que sim" (B,84).

Em síntese, para Beatriz, a matemática consiste num conjunto de operações, regras e técnicas úteis à resolução de situações e problemas. Este conjunto parece ser isento de ambiguidades e arbitrariedades, uma vez que, nas palavras desta professora, aí 'não há meio termo pois, aquilo que é, é mesmo, e pode-se demonstrar'. Enquanto ciência, está em expansão, é mais certa que as outras ciências, objectiva e, fundamentalmente, dedutiva, ficando os teoremas matemáticos, em princípio, demonstrados para sempre. Beatriz admite a existência de beleza em matemática e indica que a intuição pode ter um papel importante na actividade de produção do saber matemático.

Considerando as três principais filosofias que, segundo Ernest, são sustentadas pelos professores de matemática (*absolutismo*, *absolutismo progressista* e *falibilismo*) e que foram apresentadas na secção anterior deste capítulo (38), é plausível considerar a hipótese da *filosofia pessoal* de Beatriz sobre a matemática se dirigir para o *absolutismo*, apresentando, no entanto, traços consistentes com o *absolutismo progressista*.

O sentido de resolução de problemas em educação matemática

Problema de matemática: Para Beatriz, "no fundo um problema é sempre qualquer coisa para a qual a gente vai tentar arranjar uma solução, uma resposta" (B,94), não coincidindo necessariamente com "aqueles problemas dos números, das idades, das torneiras" (B,94).

Sendo um problema "qualquer coisa" que tem que ser resolvida, há necessidade, na perspectiva de Beatriz, que no seu enunciado haja sempre uma pergunta. Por seu turno, esta pergunta pode assumir a forma de um pedido "para mostrar ou verificar alguma coisa" (B,100).

Surge, assim, a identificação de um problema com "uma questão que tem que ser resolvida" (B,100) e, nessa medida, a resolução de problemas consistirá em "tentar encontrar a solução dessas questões que são postas" (B,94).

Esta ideia é reforçada pela análise, elaborada por Beatriz, das propostas de trabalho incluídas no anexo A (39). Aí, apenas rejeita A6 e A4 (respectivamente uma situação e um problema da vida real) como constituindo exemplos de possíveis problemas de matemática. Quanto à proposta A6 indica que o seu enunciado não inclui nenhuma questão, e que "assim como está não tem sentido para os alunos" (B,103). Relativamente a A4, embora comece por dizer que "nem sequer tem uma pergunta" (B,100), acaba por concluir que tem uma questão, pois pretende saber-se que quantidade de alcatifa se vai comprar e quanto se vai gastar. No entanto, salienta, "se não sabem as dimensões do quarto, como é que eles [os alunos] podem fazer alguma estimativa?" (B,101).

Assim, um problema de matemática, para lá de constituir uma questão a resolver parece ainda integrar a necessidade de incluir no enunciado todos os dados que são necessários à sua resolução pelos alunos.

Esta possível interpretação de problema de matemática levanta a dúvida de se para Beatriz existirá ou não alguma diferença entre este e um exercício de matemática. Por vezes esta distinção parece não existir. Por exemplo, quando da análise das propostas de trabalho incluídas no anexo A, Beatriz referiu-se a A8 tanto como "uma expressão normalíssima das potências para o 9º ano" (B,103), como "um problema a nível de 9º ano" (B,102).

No entanto, se tivermos em conta a globalidade das duas entrevistas realizadas com esta professora, a resolução de problemas parece distinguir-se da resolução de exercícios. De facto, excepto no que se prende com a análise das propostas de trabalho incluídas no anexo A, a palavra problema é sempre referida por Beatriz distanciando-se de situações rotineiras que os alunos podem resolver através da simples execução de cálculos, o que aconteceria com os exercícios. Nos problemas haveria um texto que é necessário interpretar.

Para esta professora a resolução de problemas aparece, fundamentalmente, associada à resolução de equações:

• "Nós usamos mais a resolução de problemas nas equações" (B,93);

• "Eu vejo os problemas muito ligados às equações, não é?" (B,98)

A associação preferencial que Beatriz parece estabelecer entre problemas e equações aparece ainda na sua resposta ao pedido de indicação de um exemplo concreto de um problema de matemática:

> "O João pensou num número, somou-lhe não sei quantas unidades e obteve tanto..." (B,68).

Este exemplo constitui, para Beatriz, um problema de matemática, na medida em que "principalmente se os números não forem assim muito pequeninos, os alunos têm que pensar um bocado. Não podem dizer logo é tanto..." (B,68). A opção por este exemplo está relacionada com a necessidade de ensinar, no terceiro período, aos seus alunos do 7º ano de escolaridade, o conteúdo programático equações lineares.

Assim, e a par da necessidade de um problema incluir no seu enunciado uma questão e os dados necessários à sua resolução, para esta professora um problema de matemática parece ainda requerer que os alunos desenvolvam um esforço mental de análise e interpretação de uma situação que é descrita.

Tendo em conta o que foi dito, levanta-se, por um lado, a questão do papel que Beatriz reservará aos problemas no currículo de matemática e, por outro, de como conceberá a actividade de resolução de problemas na sala de aula.

Relativamente ao exemplo concreto que escolheu, para ilustrar um problema de matemática, indica que este poderia proporcionar a introdução do conceito de equação a alunos do sétimo ano Unificado e ilustrar "como se resolveria [para em seguida passar] ao concreto já das equações" (B,69).

De uma maneira geral, refere que os problemas servem para introduzir certos assuntos e mostrar aos alunos a utilidade da matemática:

> "Para já, muitas vezes, serve-nos para introduzir determinado tipo de matéria e para ver que determinados conceitos que eles dão são úteis para a resolução de problemas" (B,97).

Assim sendo, no ensino da matemática, para Beatriz, "há sempre possibilidades de se colocar (...) uns ou outros [problemas]" (B,97).

Embora a preferência desta professora vá no sentido de colocar aos seus alunos problemas para equacionar, ela própria refere que gostaria que resolvessem outros problemas:

> "Eu penso que era mais giro que eles não resolvessem só aqueles problemas de pensar em números ou a idade do não sei quantos. Que resolvessem problemas que às vezes têm nas revistas de passatempos porque aí já eles viam que a matemática era uma coisa já mais do dia a dia do que propriamente aqueles 'bicharocos' que eles têm que aprender" (B,74).

Estes problemas surgiriam se o professor destinasse tempo para isso, ou quando, na Escola, se realizassem determinadas actividades, nomeadamente, "Tipo mini-olimpíadas" (B,74). Assim, ficar-lhes-ia reservado um lugar à margem das actividades curriculares ou paralelo a estas.

Resolução de problemas em contextos escolares: Para Beatriz, a resolução de problemas obriga os alunos "a raciocinar (...) a pensar (...) e se calhar a ver que a matemática não é assim tão abstracta como às vezes eles pensam" (B,97).

Assim sendo, esta professora considera que é importante trabalhar com todos os alunos resolução de problemas, preocupando-se em ajudar não apenas os melhores. Na sua perspectiva, "um aluno pode ser fraco numa matéria e nos problemas que até é uma coisa geralmente difícil conseguir" (B,76).

Globalmente, a actividade de resolução de problemas é concebida, por esta professora, do seguinte modo:

> "É os alunos fazerem ou individualmente ou em conjunto com o professor, determinados problemas que lhes são propostos. Ou fazerem em casa e depois trazerem, ou fazerem na aula uns com os outros, ou irem dando pistas e o professor ir fazendo no quadro. Poderá ser dessas formas" (B,96).

A compreensão de como interpreta Beatriz aquela actividade, poderá ser alargada pela descrição de como trabalharia resolução de problemas numa turma do 7º ano Unificado: teria o cuidado de encontrar enunciados "simples no sentido da interpretação (...) que fossem simples na linguagem e simples nas equações que eu lhes estivesse a ensinar" (B,73). Arranjava, assim, "uma série de problemas engraçados" (B,73), que tentava que os alunos equacionassem e conseguissem resolver.

Neste âmbito, o seu papel seria o de "orientar [os alunos] um bocado, explicar o que tinham que fazer e tentar, se calhar, ajudá-los, porque, às vezes, nem sempre conseguem" (B,73); por vezes admite ter de "dirigi-los um bocado, mesmo que não quisesse" (B,73).

Os alunos trabalhariam individualmente, caso "a turma fosse muito barulhenta (...) e onde os mais fracos não conseguissem ser ajudados" ou em grupo, se a turma fosse "bem comportada" (B,74).

Para Beatriz, trabalhar em torno de resolução de problemas significa "Ser a matéria toda dada à base de um problema que surge e agora vamos tentar ver como vamos fazer" (B,93). Este trabalho envolveria fornecerem-se aos alunos problemas, cuidadosamente seleccionados, a partir de livros de texto que depois seriam estudados em pequenos grupos. Neste contexto, o papel do professor seria "Coordenar mais ou menos a forma como eles fariam as coisas (...) Incutir-lhes um bocado o espírito do trabalho em grupo... tentar rentabilizar o trabalho deles ao máximo" (B,95).

Na sua perspectiva, o currículo de matemática apenas deixa lugar para a realização de um trabalho em torno de resolução de problemas a nível do ensino das equações:

> "Eu acho que dentro dos conhecimentos que eu tenho é mais só ao nível do ensino das equações, porque de resto... Deve haver se calhar muitas coisas giras, só que a pessoa está um bocado limitada no tempo, nas turmas e também nos conhecimentos que tem" (B,96).

Exceptuando as equações, para Beatriz, não é possível, pelo menos por enquanto, organizar o seu trabalho com todos alunos e em qualquer nível de ensino em torno de resolução de problemas, embora reconheça que pudesse ser "muito engraçado" (B,93) e talvez os alunos ficassem a "perceber melhor" (B,94).

Esta impossibilidade decorre da (a) dificuldade de encontrar, relativamente a alguns assuntos, "um problema tipo para [chegar] a determinadas conclusões" (B,96), como acontece concretamente, na sua perspectiva, com os radicais; da (b) necessidade de muito trabalho e muita pesquisa para encontrar os problemas necessários (B,93) e ainda da (c) necessidade de "muito tempo para determinadas matérias" (B,94) serem ensinadas.

A estes constrangimentos junta-se a dificuldade de quebrar rotinas já instaladas relativamente ao modo como o professor dá as aulas, bem como "a mais reuniões, se calhar, entre os colegas para as quais as pessoas nem sempre estão predispostas" (B,97).

Pelo que foi dito, podem destacar-se alguns dos elementos caracterizadores das *representações pedagógicas* de Beatriz sobre resolução de problemas.

Globalmente, para Beatriz, os problemas de matemática distinguem-se dos exercícios de matemática. Os problemas são questões que requerem, a quem os pretende resolver, o desenvolvimento de um esforço intelectual que vai para além do recordar e aplicar procedimentos imediatamente disponíveis. Assim, para esta professora, os problemas têm um carácter não rotineiro. Essas questões, predominantemente associadas a problemas para equacionar na terminologia de Abrantes (40), devem incluir, no enunciado, todos os dados necessários à sua resolução.

Nas actividades de ensino da matemática, os problemas surgem apenas em determinadas ocasiões, tendo por função (a) interessar os alunos para o ensino de determinados conteúdos e procedimentos matemáticos, (b) proporcionar alguma justificação para o ensino e aprendizagem da matemática, para que os alunos descubram a sua utilidade, e (c) por vezes possibilitar que os alunos se divirtam com a matemática que já aprenderam. Simultaneamente, a resolução de problemas consiste, para Beatriz na resolução de questões não rotineiras e constitui um meio dos alunos aplicarem conhecimentos e procedimentos anteriormente ensinados.

Tendo por base a categorização de Stanic e Kilpatrick (41) poder-se-á dizer que, para Beatriz, relativamente ao currículo de matemática, a resolução de problemas desempenha os papéis de justificação, motivação, prática e, por vezes, de recreação.

3.3 - Professora Eloísa

Enquadramento profissional e perspectiva sobre o ensino

Percurso profissional: Bacharel em Engenharia Civil, Eloísa, quando terminou o curso, começou por trabalhar como engenheira numa empresa privada. Posteriormente, devido a problemas económicos por que a empresa passava no momento, resolveu começar a dar aulas, experiência que de início não se lhe revelou "muito agradável" (E,110). Desse primeiro ano ficou-lhe, no entanto, a ideia de que o ensino podia constituir uma oportunidade de contacto com gente jovem com quem gosta de "falar, passar o tempo e dialogar" (E,110). No ano seguinte continuou a ensinar e então decidiu-se ser professora.

Para lá da possibilidade de contacto com os jovens, a decisão de ser professora desta disciplina radicou-se no facto de gostar de compreender matemática sem decorar e "de maneira a não deixar escapar nada" (E,111); indica ainda a possibilidade de no ensino poder "transmitir" (E,111) os pensamentos que desenvolve quando pretende resolver uma situação:

> "Bom, gostava basicamente de matemática e passava horas a estudar, (...) Como pensava muito acho que agora é... dá-me muito gozo transmitir os meus pensamentos quando quero resolver uma situação. E aqui posso fazê-lo" (E,111).

Assim, a experiência docente, além de possibilitar a junção entre o gosto pela matemática, que desde cedo experimentou, e o gosto pelo convívio com os mais jovens, tornou ainda viável, para Eloísa, a realização de um trabalho onde pode transmitir os seus próprios pensamentos.

A matemática na vida da professora: Hoje, professora há doze anos, ao longo dos quais realizou a profissionalização, em que desempenhou funções no âmbito da formação de professores e como delegada de grupo, tenta "transmitir aos [seus] alunos" (E,111) aquilo que aprendeu ao longo dos anos em que estudou matemática:

> "acho que aprendi a pensar... aprendi a desenvolver raciocínios e é isso que eu agora tento transmitir aos meus alunos" (E,111).

Nessa medida, reconhece que a sua experiência, enquanto aluna, influenciou a professora que hoje é.

Tal como aconteceu com ela própria, Eloísa parece supor que, pelo menos até determinadas idades e para alguns alunos, o estudo da matemática em geral pode constituir um veículo para aprender a pensar e a raciocinar:

> "dever-se-ia explicar bem aos alunos que realmente até ao nono ano [a matemática] são raciocínios que lhes podem facilitar, desenvolver o próprio raciocínio, que até essa idade é que é possível fazer. Até aos treze, catorze, quinze anos há um desenvolvimento que a pessoa tem que ter não é? (...) E se não lhes é puxado o raciocínio... Mas não obrigatoriamente. A pessoa tem que estar disponível" (E,130).

A relevância do ensino da matemática prende-se, pois, para esta professora, com a contribuição que a aprendizagem desta disciplina poderá ter para o desenvolvimento cognitivo dos alunos de algumas faixas etárias, nomeadamente, para o desenvolvimento do seu raciocínio.

No entanto, para Eloísa, ensinar matemática de modo a que os alunos aprendam a pensar e a raciocinar, parece não ser de fácil concretização nas actividades de ensino que se implementam nas salas de aula:

> "o grande pecado da matemática é não fazer com que os alunos pensem sozinhos" (E,124).

Aí, a relevância da aprendizagem da matemática surge, fundamentalmente, associada a objectivos escolares-académicos, ou seja, à sua utilidade para a vida escolar futura do aluno. De facto, na perspectiva de Eloísa, o que o "sistema educativo (...) pretende dos professores de matemática é que se transmitam aos alunos alguns conhecimentos que lhes vão permitindo transitar de ano e conseguir ir acompanhando os anos seguintes. Mais nada" (E,125). Os alunos aprendem matemática porque "ela faz parte dos programas do ensino secundário" (E,140), porque "têm a disciplina para fazer" (E,140).

Neste contexto, Eloísa exerce a sua actividade de professora, "acreditando que o programa [de matemática] tem lá aquilo de que os alunos precisam" (E,140), isto é, parte do princípio que "o programa está elaborado de modo a que o aluno saia da Escola com conhecimentos que lhe permitam continuar os seus estudos, para que, mais tarde, possa escolher a sua forma de vida" (E,139,140).

Deste modo, embora indicando que o programa de matemática "é mau" (E,141), não o põe em causa quando organiza as actividades de ensino. Como refere, porque "neste momento assumi plenamente a função de professora de matemática, ensino matemática tendo como objectivo ensinar aquilo que o programa me pede" (E,139).

Como actividade típica para ensinar matemática, Eloísa indica "o quadro, o giz (...) [e] o diálogo com os alunos" (E,122). Aí o professor apresenta o conteúdo que pretende ensinar, após o que ilustra a sua utilização para, finalmente, aplicar esse conteúdo à resolução de exercícios "que são situações idênticas às que transmitiram anteriormente" (E,123).

Para Eloísa, este processo de ensinar matemática é questionável. O questionamento parece prender-se, não tanto com a estrutura do ensino da matemática assim descrito, mas sobretudo com a qualidade das actividades que aí desenvolvem o professor e os alunos, ou seja, com o facto de ser o professor a explicar e resolver e os alunos se limitarem a copiar.

De facto, Eloísa refere que "um pouco grave nisto tudo é que, em seguida, é ainda o professor que resolve os exercícios que pôs no quadro" (E,123) limitando-se os alunos a "[copiar] do quadro e depois [a estudar] os mesmos exercícios nas vésperas dos testes" (E,123). Ora, limitar o estudo da matemática ao estudo repetitivo de exercícios resolvidos pelo professor, significa que os alunos "não sabem resolver exercícios novos (...) Não aprenderam a pensar, não aprenderam nada" (E,124).

Quer nas razões que indica para fundamentar a decisão de ser professora, quer na forma como concebe esta actividade, destaca-se a ideia de que o professor é, antes de mais, um transmissor. Esta ideia é reforçada quando se constata que ao longo das duas entrevistas realizadas as referências que Eloísa faz ao papel do professor incluem na generalidade dos casos a palavra *transmissão* ou tempos do verbo *transmitir* (E,111,117,120,122,123,125,143,145, 146,150).

Segundo Eloísa, a matemática que o professor transmite na sala de aula é uma parte daquela que é desenvolvida pelos "investigadores em matemática" (E,120) - são eles que a fazem e não o professor ou os alunos:

> "considero que quem faz matemática são os investigadores em matemática. (...) Acho que eu não faço matemática (...) ensinar matemática para mim é ensinar a matemática desenvolvida e conhecida até aos nossos dias, embora eu não faça também isso, porque nos nossos dias já existem outras coisas que nós não ensinamos aqui" (E,120).

A transmissão e explicação dos conteúdos matemáticos não se esgota, para esta professora, na prescrição e treino de regras e procedimentos destinados a resolver exercícios tipo. Não estar "simplesmente a mecanizar os alunos" (E,119) e "engendrar outras situações" (E,119) que permitam estabelecer relações entre ideias matemáticas parecem ser duas vertentes que Eloísa privilegia na organização do seu ensino.

Na sala de aula o professor deve ter em atenção que os alunos aprendem de maneiras diversas, o que poderá requerer a necessidade de encontrar explicações diferenciadas (E,118). Além disso, faz parte das suas funções ajudar o aluno a analisar os erros que comete, conduzindo-o, sem o "intimidar" (E,119), de modo a levá-lo "a concordar que a solução é errada (...) que o processo que utilizou não podia ser aquele, tinha que ser outro" (E,118).

De tudo o que anteriormente foi dito parece evidenciar-se que, para Eloísa, as actividades de ensino da matemática na sala de aula devem ser organizadas pelo professor de modo a que este possa transmitir aos alunos os conteúdos matemáticos incluídos no currículo. A função do professor consiste em encontrar processos de explicar aos alunos, de forma clara, um saber matemático já constituído, conduzindo-os na sua compreensão. Assim, as ideias matemáticas surgem fundamentalmente a partir da exposição do professor, não emergindo da actividade matemática desenvolvida pelos alunos. A exposição dos conteúdos matemáticos deve ser conduzida pelo professor tendo este a preocupação de que não basta ensinar 'como fazer', mas também 'porque fazer'; deve ainda ser conduzida de modo a ter em conta que os vários alunos presentes numa sala de aula de matemática aprendem de formas diferenciadas.

Em resumo, embora para Eloísa o conteúdo matemático tenha um lugar central nas actividades a desenvolver na sala de aula, quem aprende não é esquecido, assim como não é esquecida a importância da compreensão pelos alunos de processos e ideias matemáticas e de relações entre essas várias ideias. Deste modo, seguindo a terminologia adoptada por Kuhs e Ball (42) se, por um lado, não é de considerar plausível a conjectura de as *representações pessoais* de Eloísa sobre a natureza do ensino e aprendizagem da matemática se enquadrarem em *perspectivas focadas em quem aprende*, por outro lado é de levantar a questão de se essas representações não serão globalmente consistentes com *perspectivas de ensino focadas no conteúdo com ênfase na compreensão conceptual*.

As duas entrevistas, realizadas com esta professora, parecem conduzir no sentido de uma resposta afirmativa a esta questão. No entanto, uma resposta afirmativa, profundamente fundamentada, envolverá o recurso a novos processos metodológicos complementares aos utilizados na presente investigação.

Filosofia pessoal sobre a matemática

As questões colocadas a Eloísa sobre matemática enquanto ciência foram, muitas das vezes, seguidas de pausas prolongadas, o que, frequentemente, conduziu à necessidade de reformulação dessas mesmas questões, tendo a professora expressado a dificuldade neste domínio e mencionado, nomeadamente, a existência de aspectos sobre os quais nunca tinha pensado (E,115,125,131,133,135,137). Esta dificuldade transparece, por exemplo, quanto à comparação da matemática com outras ciências, quanto à certeza do conhecimento matemático e ainda quanto à existência ou não de beleza em matemática:

- "Acho que não têm naturezas idênticas [a matemática e as outras ciências]. Não sei se atingi bem o nível da pergunta" (E,131);

- "(Pausa) Tenho muita dificuldade em comentar isso... (Pausa) [o conhecimento matemático é mais certo, é menos falível que o conhecimento noutras ciências]" (E,131);

- "criar a demonstração de um teorema (...) É capaz de ser muito parecido com a criação de uma obra de arte. Acho que sim. Nunca tinha pensado nisso" (E,133);

- "[Será que um resultado matemático uma vez provado fica provado para sempre?] Tenho muita dificuldade em admitir isso. Porque em relação a métodos de provar isto ou aquilo também não tenho grandes conhecimentos. Mas, intuitivamente penso que não."(E,135).

Apesar destas dificuldades, Eloísa respondeu prontamente à questão de como explicaria a alguém o que é a matemática:

> "Explicava que é uma ciência muito antiga, que começou por ser necessária porque existiam problemas correntes de agricultura e de astronomia e outras coisas que... na antiguidade eram situações que os reis exigiam aos cientistas que resolvessem... Portanto, começou por ser uma necessidade que começou a ser mais desenvolvida e os matemáticos a seguir criaram situações que já transcendem o dia a dia. (...) com o desenvolvimento que foi tendo, se continua a fazer falta nalgumas áreas, existem alguns problemas que são criados pelos matemáticos, que não correspondem nada à nossa vida corrente. São simplesmente ideias que lhes ocorrem e que eles põem à consideração do mundo" (E,112,113).

Há nesta descrição de Eloísa algumas ideias que poderão iluminar a interpretação concedida, por esta professora, ao processo de produção do saber matemático: na origem da produção matemática há problemas que se procuram resolver. Esses problemas emergem de necessidades do dia a dia ou, então, são criados pelos matemáticos, tendo por base o desenvolvimento interno da própria matemática.

Os matemáticos, na perspectiva de Eloísa, embora não sejam "seres com iluminações especiais" (E,115), "têm algo que lhes indica que é possível continuar e encontrar, criar fórmulas novas, resolver problemas novos" (E,126). Com uma "capacidade de abstracção que os leva a ver mais além" (E,115) e movidos por uma "curiosidade de conhecer" (E,115) que lhes vem "desde meninos" (E,115), começam por tentar resolver problemas não resolvidos, deixados por outros matemáticos. Com esta actividade, que requer muito esforço e persistência, criam matemática (E,132), criam problemas (E,113), criam "a demonstração de um teorema" (E,133).

Assim sendo, a actividade humana desempenha, para Eloísa, um papel criador na produção de novo conhecimento matemático. Relativamente a esta produção, "intuitivamente" (E,135) esta professora tem "muita dificuldade em admitir" (E,135) que um resultado matemático, uma vez provado, fique provado para sempre, colocando mesmo a hipótese de poder vir a provar-se "que não era bem assim" (E,136):

> "Penso que poderá (...) existir alguma forma de até provar que não era bem assim: Que até ali era, mas que afinal agora já não é" (E,135,136).

Sendo a matemática uma "ciência em desenvolvimento e investigação ainda" (E,134), levanta-se a questão de como Eloísa conceptualizará o papel da descoberta e da invenção em matemática. Para esta professora, a matemática descobre-se e/ou inventa-se?

> "Acho que se descobrem algumas coisas por intuição e se inventa a forma de aplicar o que se descobre" (E,138).

Deste modo, a matemática "Descobre-se porque se encontra uma fórmula, encontra-se uma expressão, encontra-se qualquer coisa" (E,138), sendo função dos matemáticos tentar "descobrir novas fórmulas, novas ideias que possam vir a ser aplicadas" (E,114). É a intuição que facilita (torna possível?) a descoberta. Através da intuição, por vezes, um investigador encontra um resultado e, em seguida, "debate-se para justificar que a intuição está correcta" (E,136). Posteriormente à descoberta "inventa-se uma forma de aplicar (...) [o] que se descobriu mas é noutra ciência" (E,138).

Em suma, os conceitos matemáticos, na perspectiva de Eloísa, descobrem-se mas não se inventam; o que se inventa é a forma de os aplicar num campo que não o matemático. No âmbito da descoberta, a intuição desempenha um papel fundamental.

Se a matemática for "aplicada para aquilo para que foi criada" (E,132) constitui uma ciência rigorosa e exacta: o rigor matemático é assim, para Eloísa, "específico daquela situação e não de outra" (E,132). Para lá desta exactidão e rigor relativos, o único atributo que associa à matemática é a utilidade.

Tendo em conta tudo o que anteriormente foi dito, nomeadamente o reconhecimento, por Eloísa, do papel criador da actividade humana no desenvolvimento de novo conhecimento matemático, parece pertinente considerar-se que a *filosofia pessoal* de Eloísa sobre a matemática tende, preferencialmente, no sentido do *absolutismo progressista*, utilizando a designação proposta por Ernest (43) e apresentada na secção anterior deste capítulo.

O sentido de resolução de problemas em educação matemática

Problema de matemática: Eloísa começa por indicar que, para si, problema de matemática não significa o mesmo que exercício de matemática:

> "Considero problema um enunciado que contém uma série de considerações acerca de uma situação, em que depois aparecem algumas perguntas relacionadas com tudo o que foi dito anteriormente e em que nessas perguntas eventualmente haverá cálculos para efectuar. Considero exercício, por exemplo, uma equação, uma expressão com potências, com radicais, em que se diz simplesmente: resolve a expressão, calcula a expressão" (E,113).

Assim, na perspectiva desta professora, o que parece distinguir um problema de matemática de um exercício é a inclusão, no enunciado do problema, da descrição de uma situação acerca da qual se fazem perguntas e cuja resolução envolve o aluno na procura de uma resposta, que depende da análise da situação descrita e não se obtém directa e simplesmente a partir da realização de cálculos. Num exercício "o aluno simplesmente põe em prática uma série de regras que aprendeu e não tem que fazer mais nenhum raciocínio que o leve a ponderar na resposta a dar" (E,113), enquanto que, num problema, as perguntas "que aparecem (...) [estão] relacionadas com tudo o que foi dito anteriormente" (E,113).

Deste modo, num exercício o aluno executaria uma 'ordem' dada pelo enunciado, 'ordem' essa que o conduziria à aplicação de regras anteriormente aprendidas, e a uma resposta que não poderia ser discutida; um problema conteria, no seu enunciado, a descrição de uma situação e questões, relacionadas com essa descrição, cuja resposta poderá ser susceptível de comentário ou discussão por parte do aluno.

Por um lado, esta ideia é apoiada, nomeadamente, pelos exemplos concretos que Eloísa apresenta para ilustrar um exercício de matemática e um problema de matemática. Como exercício escolhe "calcule $\left[(\sqrt{5})^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] \times \sqrt{2}$" (E,113,114); como problema "[lembra-se] imediatamente do problema que é ao nível do oitavo ano e que é sobre galinhas, coelhos, patas... " (E,112). Posteriormente, como exemplo concreto de um problema de matemática, para o oitavo ano, indica :

> "Um número é um quarto de outro; sabendo que a soma é tanto, indique o valor de cada um deles" (E,117)

Por outro lado, a mesma ideia é ainda apoiada pela análise, elaborada por Eloísa, das propostas de trabalho incluídas no anexo A (44). Aí, apenas escolhe como exemplo de um exercício, a proposta A8, argumentando que se resolve "utilizando regras de cálculo impostas [não existindo] forma de chegar a um resultado que possa ser comentado pelo aluno" (E,151); a proposta de trabalho A9 é considerada um problema, pois tem "uma resposta susceptível de discussão" (E,151) (43).

Seguindo a distinção estabelecida por Eloísa, entre exercício e problema de matemática, torna-se claro que, na perspectiva desta professora, todos os dados necessários à resolução de um exercício fazem parte intrínseca do enunciado desse exercício. Já não é tão claro se o mesmo se passa com os problemas.

As duas entrevistas realizadas indicam que, para Eloísa, o enunciado de um problema de matemática, para lá de descrever uma situação acerca da qual se fazem perguntas, deverá ainda fornecer toda a informação que é necessária para que os alunos possam encontrar a resposta para estas perguntas. Esta professora parece rejeitar a ideia de que sejam os alunos a investigar e encontrar alguma dessa informação.

De facto, em primeiro lugar, quando se fala em resolução de problemas, Eloísa pensa "numa questão em que são fornecidos dados, conhecidos evidentemente, e em que são pedidos outros que terão que ser determinados ou não, ou que poderão ser postos à discussão e até se chegar à conclusão que o problema não tem razão de existir" (E,142).

Em segundo lugar, a análise elaborada por Eloísa, relativamente às propostas de trabalho incluídas no anexo A, evidencia também que estes dados devem ser fornecidos aos alunos em número suficiente para que estes possam resolver os problemas que o professor lhes propõe. Exceptuando A8, que considera um exercício, Eloísa, de entre as restantes oito propostas de trabalho, apenas exclui como possíveis exemplos de problemas as propostas A4 e A6, respectivamente um *problema da vida real* e uma *situação*.

Como justificação, refere que A6 "Só fornece termos de números. Não tem mais considerações (...) Tem poucos elementos" (E,151). De A4 indica que "não tem elementos suficientes" (E,151) e salienta que esta proposta de trabalho "Leva os alunos a não tentarem resolver problemas que à partida têm falta de elementos" (E,152).

Para lá do que foi dito, é de acrescentar que, para Eloísa, ser ou não ser um problema de matemática não é uma propriedade inerente a uma tarefa, mas antes depende da pessoa a quem é proposta a realização dessa tarefa. Por um lado, a descrição da situação, incluída no enunciado do problema, deve fazer sentido para a pessoa a quem este é apresentado - caso contrário, não será um problema, mas antes "um absurdo" (E,155). Por outro lado, como indica referindo-se aos alunos, "tudo depende da aprendizagem anterior" (E,150).

Resolução de problemas em contextos escolares: Para Eloísa, ao longo do ano lectivo deve haver algumas ocasiões em que a resolução de problemas evidencie a utilidade da matemática, "para que os alunos não tenham sempre aquela ideia de que estão a aprender coisas que não servem para nada" (E,149).

Na sua perspectiva, embora o actual currículo de matemática não "[proíba], em parte nenhuma, de utilizar a transmissão dos conteúdos utilizando os problemas (...) também não pede a resolução em todo o programa (...) [mas apenas] em certas zonas" (E,146), "Em certas partes da matéria" (E,147). A resolução de problemas como campo de aplicação de conhecimentos anteriormente aprendidos é, para esta professora, o que é pedido nos programas de matemática:

> "Não me recordo bem, bem, mas as coisas são postas assim: resolução de equações e resolução de problemas" (E,147).

Se Eloísa pretendesse trabalhar resolução de problemas, no sétimo ano do Curso Unificado, "gostava de fazer o seguinte" (E,126):

> "Arranjava fichas com diferentes problemas; dividia a turma em grupos de trabalho e (...) correndo o risco de todos quererem resolver a mesma ficha, punha a escolha ao critério dos alunos. (...) considerando que cada folha tinha dois problemas, dava-lhes uma aula para os resolverem. Na aula seguinte (...) um elemento do grupo, escolhido por eles, iria depois transmitir aos outros o problema que tinha e como o tinha resolvido" (E,126,127).

Consoante os conteúdos programáticos a ensinar, assim apresentaria os problemas aos alunos antes de "lhes dizer as regras" (E,128) ou após o ensino directo das técnicas matemáticas necessárias à resolução desses problemas:

> "Em relação aos números relativos, por exemplo, (...) acho que era possível [pôr a história da temperatura] antes de indicar as regras. (...) Talvez seja uma forma de os levar a pensar primeiro antes de eu lhes dizer as regras (...) No caso das equações, primeiro ensinava o mecanismo todo, (...) e depois é que punha os problemas" (E,128)

Pelo que foi dito, a resolução de problemas no âmbito do currículo de matemática surge, para Eloísa, como meio de, pelo menos algumas vezes ao longo do ano lectivo, evidenciar perante os alunos a utilidade da matemática. A este papel juntam-se outros: a resolução de problemas como a prática necessária para que os alunos possam aplicar competências anteriormente aprendidas, e ainda como motivação para a aprendizagem de novos conceitos ou procedimentos matemáticos.

Um professor de matemática, que pretendesse organizar o seu trabalho com os alunos em torno de resolução de problemas, teria, na perspectiva de Eloísa, de seleccionar os problemas a trabalhar na sala de aula, pois é o professor que "tem o objectivo de transmitir aqueles conteúdos, de ensinar algo que naquela altura do ano é necessário" (E,145). Em seguida, apresentaria esses problemas aos alunos, e teria que ser capaz de daí "retirar indicativos com muito cuidado, de maneira a encaminhar os alunos para os aspectos importantes que queria focar" (E,144).

Por seu lado, os alunos teriam que "pensar ao mesmo tempo que o professor (...) [sem que este lhes desse] todos os indicativos de como as coisas se iriam passar"

(E,144), o que "é sempre mais difícil porque os alunos estão à espera do contrário" (E,144).

Para Eloísa, esta era uma forma de conceber o papel da resolução de problemas que "É o contrário" (E,147), do que é pedido nos programas de matemática. Na sua opinião, um professor de matemática que pretenda seguir por aí, para lá de ser "um bom investigador" (E,142) teria que ser "muito corajoso" (E,141). Além das dificuldades inerentes à própria organização do trabalho, teria que enfrentar outras dificuldades de vária ordem algumas das quais são, na sua opinião, intransponíveis com a actual organização do sistema de ensino.

Entre essas encontram-se o tipo de horários, dos professores e dos alunos, a organização e recursos dos espaços escolares e o "conseguir que os alunos aceitassem uma estratégia de ensino a que não estão habituados" (E,144):

- "Para a partir de um problema se descobrirem princípios de equivalência é quase como um processo de investigação, penso eu. Ora talvez nem todos os alunos aceitassem muito bem esse tipo de trabalho." (E,144).

- "o ensino de conteúdos utilizando problemas (...) não poderia ser limitado à hora e ao minuto" (E,144,145).

Assim, actualmente, Eloísa, pensando em qualquer nível de ensino, não vê "hipóteses" (E,147) de, sistematicamente e ao longo do ano, trabalhar com os alunos em torno de resolução de problemas, a menos que se mudasse "muita coisa" (E,147).

De qualquer modo, também não sabe "se tudo o que é relativo à matemática realmente tem que ser resolvido utilizando os problemas" (E,148). "Completamente não [adere à] (...) ideia" (E,148,149) de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas deva ser um eixo organizador do ensino da matemática, e considera que, trabalhar resolução de problemas com todos os alunos, é "importante, mas não muito" (E,149).

Na perspectiva de Eloísa, no actual sistema de ensino, o "papel importante" (E,149) que a resolução de problemas pode ter é "mostrar, evidenciar na aula, que há determinadas situações que as pessoas gostavam de ver resolvidas e que a matemática resolve-as (...) Mostrar aos alunos, responder-lhes quando perguntam 'para que é que isso serve'" (E,149).

Em face do anteriormente exposto, sobressaem indicadores que possibilitam a compreensão de algumas vertentes das *representações pedagógicas* de Eloísa relativamente à resolução de problemas no âmbito da educação matemática.

Para esta professora, o conceito de problema tem um carácter relativo: uma tarefa matemática pode ou não constituir um problema, consoante a pessoa a quem é apresentada. Por outro lado, um problema de matemática consiste, essencialmente, na descrição de uma situação, envolvendo determinadas quantidades, seguida por uma questão acerca de alguma relação entre essas quantidades. Nessa descrição deve ser fornecida toda a informação necessária à resolução do problema.

Um problema distingue-se de um exercício na medida em que a questão apresentada exige que o aluno interprete a situação e pondere a resposta a dar, e não resulta directamente da execução de uma 'ordem' dada pelo enunciado que o conduziria simplesmente à aplicação de regras e procedimentos anteriormente ensinados e memorizados.

Os problemas, para Eloísa, constituem meios importantes, mas não fundamentais, de motivar, aplicar e reforçar a aprendizagem da matemática e além disso, de justificar o ensino desta disciplina. Consistentemente, apresentam-se aos alunos fundamentalmente nos capítulos mais vocacionados para tal.

Assim sendo, a resolução de problemas é, fundamentalmente, encarada como a actividade que se segue à transmissão do saber matemático pelo professor e como um elemento potencialmente motivador para a aprendizagem desta disciplina. Deste modo, foca-se em aspectos isolados do currículo, não sendo considerada como uma via educativa para aprender e ensinar a matemática escolar. Nomeadamente, não está envolvida no processo pelo qual os alunos tentam encontrar sentido no ensino à luz dos conhecimentos que já possuem, no processo pelo qual tentam estruturar o conhecimento que adquiriram e relacioná-lo com o que já possuíam, no processo pelo qual desenvolvem e aplicam competências e capacidades.

Seguindo Ernest e ainda Stanic e Kilpatrick (45), poderá dizer-se que Eloísa incorpora os problemas como um conteúdo adicional a ser somado ao currículo de matemática e destinado a enriquecer o ensino, reservando para a resolução de problemas, fundamentalmente, os papéis de justificação, motivação e prática.

3.4 - Professora Filipa

Enquadramento pessoal e profissional

Percurso profissional: Filipa é uma professora efectiva, com cerca de treze anos de experiência de ensino da matemática e, presentemente, desempenha funções no âmbito da formação de professores. A escolha da licenciatura, que possui em Matemática Aplicada, não teve por objectivo o ingresso na sua actual profissão:

> "Quando fui para matemática não foi para ser professora. Fui porque gostava de matemática e obviamente porque queria ver a matemática aplicada à vida real" (F,159).

No entanto, quando terminou o curso, a falta de outras saídas profissionais levou-a a ter o "primeiro emprego no ensino (...) [de que acabou] por gostar" (F,159). Aí, agrada-lhe "o facto de estar com jovens" (F,159), a flexibilidade de horário que lhe permite que se dedique a várias actividades e, sobretudo, o trabalho na Área Escola onde se tem empenhado "nestes últimos dez anos assim com mais força" (F,160). A atenção especial que dedica a esta Área levou-a, por diversas vezes, a envolver-se, juntamente com alunos e colegas, em projectos interdisciplinares. Assim, a sua actividade de professora de matemática não se tem restringido exclusivamente ao interior da sala de aula.

Hoje considera que o professor "também é um bocado um artista [que] ou se sente bem no papel que está a desempenhar (...) ou então de facto, aquilo não resulta" (F,185,186). Neste contexto, refere que "as actividades que se colocam nas salas de aula têm muito a ver com o temperamento das pessoas" (F,188) pois há actividades, "situações em que os aspectos imprevisíveis são muitos" (F,189) e em que "é preciso ter um domínio não só dos conhecimentos em si mas, sobretudo, do estar com que é extremamente importante" (F,189).

A matemática na vida da professora: Filipa sempre gostou de matemática. Enquanto aluna, o gosto por esta disciplina andava a par com o gosto pela Química e pela Física. Nos episódios que recorda, relativamente a essa época, dá particular destaque, sobretudo, ao prazer de resolver problemas aplicados à vida real. Gostava especialmente da aplicação da matemática a situações reais, embora considerasse também "uma maravilha" (F,161) a demonstração de teoremas pois "achava piada àquele encadeamento todo" (E,161).

Para Filipa, a matemática "é o prazer de pensar e de resolver situações" (F,162) e "Fazer matemática pode ser pura e simplesmente (...) [os alunos] estarem a jogar e definir estratégias" (F,163). Considera que todos os alunos podem aprender esta disciplina, pois "é perfeitamente possível arranjar actividades atraentes (...) às quais eles aderem" (F,162). No final da primeira entrevista, para exemplificar o significado que atribui a actividades atraentes e interessantes, refere:

> "Jogos de determinado tipo. Também podes colocar actividades investigativas" (F,193)

A compreensão do que entende por "jogos de determinado tipo", pode ser alargada a partir das considerações que tece sobre o trabalho de um professor que organizou um conjunto de aulas do 10º ano, em que fez "jogos com os alunos" (F,193):

> "No fundo a ideia era sistematizar as várias estratégias e levá-los [aos alunos] a sistematizar essas estratégias discutindo-as com eles e optimizando-as" (F,193).

Enquanto professora, fundamentalmente, o que lhe interessa é que os alunos "saibam pensar" (E,191) e sintam "o prazer de pensar" (F,184). As aplicações da matemática ao mundo real, de que gostava especialmente quando era aluna, continuam a ser objecto do seu particular interesse, e procura transpôr esta dimensão para as actividades de ensino que organiza.

Actualmente, participa na implementação de uma experiência pedagógica, concebida por um grupo de professores de que ela própria também faz parte, destinada a "ensinar matemática de uma forma lúdica" (F,165) a alunos do 7º ano Unificado. Com essa experiência pretende-se, entre outras coisas, que os alunos sejam "capazes de interpretar, resolver, portanto aplicar a matemática à vida real" (F,172).

Na descrição da actividade matemática aí desenvolvida pelos alunos, encontram-se referências à discussão e realização de desenhos no quadro (F,170), à interpretação de situações, à necessidade dos alunos pensarem, raciocinarem, verem "quais são as estratégias (...) possíveis" (F,171), escolherem entre "vários caminhos possíveis (...) explorar[em] as situações todas" (F,168), terem "um método sistemático e (...) [serem] capazes de explicar como sistematizaram" (F,168).

Na perspectiva de Filipa, devia ensinar-se e aprender-se matemática "para as pessoas poderem interpretar (...) terem um espírito crítico no sentido de se poderem defender um bocado em relação à realidade com que se confrontam" (E,202).

Assim, embora refira que se devem dar aos alunos "actividades investigativas" (F,202) onde eles se envolvam "pelo prazer de investigar unicamente (...) [esta] não deve ser a perspectiva maior, porque (...) a matemática aparece aí como uma coisa fria e (...) deixa de [o] ser (...) quando aparece no meio de determinados projectos contextualizantes" (F,202,203), "em que a matemática podendo ser o núcleo de desenvolvimento (...) está inserida num contexto geral, histórico e filosófico..." (F,202).

Consistentemente, indica que, com os alunos, "deveríamos ser capazes (...) de desenvolver projectos em que fosse possível não só [levá-los] a criar coisas, como também desenvolver neles uma certa capacidade de crítica em relação às coisas" (F,198). Na sua perspectiva, estes projectos constituem um meio dos alunos verem e sentirem a utilidade da matemática na resolução de problemas do mundo real.

Como exemplo destes projectos, refere o Projecto dos Descobrimentos, um trabalho co-orientado por ela própria e desenvolvido, nesse ano lectivo, por alunos do 8º ano da escola onde lecciona. Salienta que, muitos dos alunos envolvidos "ficaram verdadeiramente apaixonados por saberem, para já, que eles sabiam (...) mais matemática que os marinheiros que tinham andado nos mares, mas também por saberem que a matemática que eles sabem no 8º ano lhes permitia resolver os problemas que naquela altura foram colocados a quem ia ao mar" (F,199).

O papel dos alunos, no desenvolvimento do Projecto dos Descobrimentos, foi diversificado. Consultaram bibliografia que lhes foi distribuída, e "foram à procura de mais" (F,199), "colocar[am] determinados problemas para responderem a situações" (F,199), tiveram o "papel de investigarem, o papel de criarem, tentarem reconstruir, entenderem um bocado aquela época, porque, ao tentarem entender essa época no seu contexto, estão, no fundo, a criar mecanismos para provavelmente interpretarem também um bocado da realidade em que vivem" (F,202).

Além disso, tiveram que explicar a outros, através de uma exposição, o trabalho que tinham desenvolvido. Nas palavras de Filipa "puseram-se a escrever, a escrever, a escrever (...) [e] às tantas o que tinham escrito estava tudo certo, só que (...) era extremamente complicado e as pessoas perdiam-se pelo meio" (F,215). Aí, "foram eles próprios que viram que, se utilizassem linguagem simbólica, era muito mais simples e muito mais claro" (F,215).

O Projecto dos Descobrimentos proporcionou, assim, um contexto em que os objectos matemáticos surgiram como instrumentos úteis à resolução de problemas, sentindo os alunos, nomeadamente, que a linguagem simbólica da matemática pode constituir um meio de expressão de ideias facilitador da comunicação.

Do que foi dito, ressalta que, na perspectiva de Filipa, o ensino da matemática na Escola deverá proporcionar, aos alunos, a aquisição de instrumentos de interpretação e descodificação da realidade que os tornem mais críticos e autónomos perante essa realidade; no processo de aprendizagem, os alunos devem envolver-se em actividades de investigação e experimentar o prazer de enfrentar os desafios com que são confrontados.

No entanto, esta professora traduz uma certa insatisfação pelo facto de, dificilmente, a matemática a ensinar, na sala de aula, poder articular todas estas dimensões de uma forma permanente e sistemática. Indica que "o sistema acaba por nos complicar a existência enquanto professores de matemática porque mesmo que não queiramos (...) somos pressionados (...) a responder a coisas que de facto não têm nada a ver com o nosso ensino" (F,161), e salienta que, por vezes, se interroga sobre onde poderá ela ensinar "aquilo que [pensa] que é a matemática" (F,166).

Para Filipa, de uma maneira geral, a actividade típica para ensinar esta disciplina na Escola é fazer "Exercícios!..." (E,164). Tipicamente, na sua perspectiva, os professores organizam as aulas de matemática começando pela correcção do trabalho de casa, após o que se segue, se for "um assunto novo" (F,164), uma introdução teórica; posteriormente, faz-se a aplicação dos conceitos ensinados à resolução de exercícios, "que muitas das vezes não passam de coisas quase imediatas" (F,165); finaliza-se, sistematicamente, com um novo trabalho de casa; este, por seu turno, é constituído também por exercícios, "Raramente é uma actividade para os alunos investigarem" (F,165); se não houver um assunto novo para introduzir, a aula será apenas de resolução de exercícios (F,164,165,166,167).

O ensino da matemática, assim descrito, constitui, para Filipa, uma forma frustante, desadequada e limitada de conceber e organizar as actividades de ensino na sala de aula:

> "Uma das frustações de um professor de matemática é, no fundo, a matemática aparecer um bocado como uma listagem de algoritmos que os miúdos vão aprendendo por aí fora, uma listagem de conteúdos em que eles mais treinados ou menos treinados lá vão respondendo" (F,200).

No entanto, na perspectiva desta professora, quando se adoptam e põem em prática formas diferentes de ensinar, encontram-se diversas dificuldades, já vivenciadas por ela própria, provenientes da própria natureza do trabalho a realizar, da sociedade em geral, dos pais dos alunos, dos próprios alunos e, por vezes, mesmo dos colegas professores de matemática. Entre estas dificuldades, que considera interligadas, inclui (a) constrangimentos resultantes do currículo de matemática prescrito; (b) pressões sociais para cumprir o programa de matemática, interpretado, exclusivamente, como uma listagem de conceitos, técnicas e procedimentos; (c) expectativas dos alunos desenvolvidas ao longo dos anos de escolaridade; (d) a necessidade de fazer um trabalho que "exige um envolvimento maior" (F,175) por parte do professor, o que o torna mais cansativo.

(a): Segundo Filipa há, no currículo de matemática, uma listagem excessiva, e não necessária, de conteúdos programáticos:

> "os programas não precisavam de ter tantos conteúdos programáticos; bastava que indicassem meia dúzia de coisas e nós girávamos de roda delas" (F,211).

(b): Ora, na perspectiva desta professora, o cidadão comum não tem em conta os objetivos indicados no currículo de matemática. Restringe este currículo à listagem dos conteúdos matemáticos a ensinar (F,171), àquilo "que está no livro" (F,172). Como a matemática constitui, presentemente, "uma disciplina selectiva (...) [que] faz parte integrante dos currículos necessários às entradas para as Faculdades" (F,161), existe uma forte "pressão social" (F,161) para o professor dar, se não todos, pelo menos a maior quantidade possível desses conteúdos. Para Filipa, esta pressão impede o professor, por vezes, de "fazer coisas interessantes" (F,161), por muito que queira avançar com elas:

> "Esta angústia permanente que os programas de matemática devem ser dados e que os miúdos precisam de saber matemática porque isso é o futuro e o futuro sem a matemática não se faz, é uma angústia permanente e que começa a ser uma angústia social" (F,166).

(c): Por seu lado, os alunos, ao longo dos anos de escolaridade, vão criando a imagem de que a matemática, em lugar de "uma coisa que [pode] ser explorada e investigada por eles" (F,171) é, antes de mais, "uma coisa imediata" (F,171), onde tem que haver "um algoritmo qualquer (...) [para] aplicar" (F,171) fornecido pelo professor e que se estuda "a fazer exercícios" (F,167). Assim, esperam que o professor lhes dê receitas para resolver as situações matemáticas com que são confrontados, nomeadamente problemas de matemática, e se tal não acontece, durante várias aulas, ficam "muito perdidos e extremamente aflitos" (F,206):

> • "Estão à espera que o professor lhes dê uma receita, não é? E ficam mais confortados com ela. E além de eles ficarem mais confortados, o próprio professor fica, de certa forma, também um bocado confortado" (F,210);
>
> • "Temos dificuldade em que os alunos venham a sentir o prazer de pensar. E não é possível fazer matemática sem existir fundamentalmente esta base de trabalho" (F,184).

Além disso, para Filipa, outra das imagens que os alunos vão construindo ao longo dos anos em que aprendem matemática, é a de que a matemática da sala de aula tem que ser uma 'coisa' séria. Esta imagem pode entrar, por vezes, em conflito com algumas das actividades de aprendizagem propostas pelo professor. Por exemplo, na experiência pedagógica realizada com os alunos do 7º ano Unificado, a dimensão lúdica que as actividades introduziam na sala de aula não era compatível com a imagem séria da matemática escolar, o que levou por diversas vezes os alunos a perguntar:

> "mas professora, quando é que a gente deixa de brincar? (...) Eles próprios têm um conceito de matemática diferente" (F,169).

(d): Finalmente, Filipa indica que, para que a matemática possa vir "a ser o centro" (F,200) de projectos análogos ao dos Descobrimentos, os professores "têm que passar a ter mais tempo para investigar, ou então as Faculdades passam a ter que ter uma estrutura diferente" (F,200). Além disso, na generalidade, "o professor de matemática tem que ter uma cultura diferente daquela que tem" (F,200). Deve possuir, nomeadamente, formação não só em "História do Pensamento Matemático, mas [em] História do Pensamento de uma forma geral, e também (...) sobre outras áreas do conhecimento" (F,200).

Em resumo, a relevância do ensino e aprendizagem da matemática ultrapassa, para Filipa, objectivos do domínio puramente académico. Aparece associada a razões de natureza estética, ao crescimento cognitivo dos alunos e ao desenvolvimento da sua independência intelectual e capacidade de crítica.

Relativamente à aprendizagem, Filipa não concebe o conhecimento matemático como algo exterior ao aluno, que o professor possui e que aquele assimila passivamente. A aprendizagem passa, fundamentalmente, pela própria actividade dos alunos. Estes aprendem matemática quando se envolvem em actividades matemáticas e aí investem um tempo que é qualitativo e pessoal. Neste processo, os erros são considerados como uma parte intrínseca e natural pois, como a própria Filipa refere, os alunos "aprendem com os erros que fazem (...) e sobretudo aprendem sabendo que há outros que erram tal e qual como eles" (F,187).

Embora o principal papel na aprendizagem pertença ao aluno, o professor constitui um elemento fundamental como organizador da informação e orientador do trabalho. Neste âmbito, Filipa procura proporcionar situações em que os alunos investiguem e explorem ideias matemáticas, preocupando-se em fomentar a sua participação activa, estimulando a comunicação e discussão.

Assim, as suas *representações pessoais* sobre a natureza do ensino e aprendizagem da matemática, embora apresentem traços de *perspectivas de ensino focadas no conteúdo com ênfase na compreensão conceptual*, seguindo Kuhs e Ball (46), parecem dirigir-se, predominantemente, no sentido do que estes autores designam por *perspectivas de ensino focadas em quem aprende.*

Enquanto professora de matemática, Filipa parece viver situações de tensão e conflito resultantes de não poder encaminhar, sistematicamente e em toda a sua extensão, a sua prática de ensino da matemática na sala de aula na direcção das finalidades que considera pertinentes para o ensino e aprendizagem desta disciplina.

Vive o dilema entre aquilo que gostaria de fazer, e aquilo que constrangimentos proporcionados pelo contexto social do ensino (onde se incluem as expectativas dos pais, alunos, colegas) e ainda pelo currículo de matemática prescrito lhe permitem que na realidade faça.

Por um lado, quer ensinar aquilo que pensa ser matemática, ou seja, "o prazer de pensar e de resolver situações" (F,162), o que requer a participação activa dos alunos em actividades diversificadas e adequadas à maturidade cognitiva de cada um (pois nem todos aprendem da mesma forma nem no mesmo tempo) e que envolve um tempo diferente e mais longo daquele que é necessário para transmitir simplesmente o saber disciplinar. Tal facto dificulta-lhe o ensino de todos os conteúdos matemáticos incluídos no currículo, sofrendo por isso os efeitos de uma 'pressão social' que vai em sentido contrário.

Por outro lado, ensinar simplesmente, na sala de aula, uma matemática já acabada, feita de regras, certezas e actividades de resolução imediata, vai de encontro às expectativas de muitos dos alunos, professores, pais e sociedade em geral, e, além disso, permite o tempo necessário para 'dar' a listagem dos conteúdos matemáticos referidos no programa. Só que, seguir por esta via, contraria as razões pelas quais, na sua perspectiva, se deve ensinar e aprender matemática em contextos escolares.

Constituirá o interesse de Filipa pela Área Escola e pelas actividades que aí podem ser desenvolvidas, juntamente com o seu envolvimento na realização de projectos com os alunos que, embora propostos na sala de aula, são acompanhados em sessões extra-aula (como foi o caso do Projecto dos Descobrimentos anteriormente referido) uma tentativa, válida no momento, de resolução desse dilema?

As entrevistas realizadas com esta professora conduzem a considerar plausível uma resposta afirmativa a esta questão. Como a própria Filipa refere, existem "objectivos programáticos (...) difíceis de desenvolver no espaço aula, mas que é possível desenvolver a partir de projectos deste tipo (F,203).

Filosofia pessoal sobre a matemática

Se Filipa tivesse que explicar a alguém o que é a matemática diria que "é o prazer de pensar e de resolver situações..." (F,162). Enquanto ciência, refere que tem "um campo extremamente especulativo que acaba por ser um jogo" (F,163), isto é, parte-se de "uma série de regras" (F,163) com as quais, através do "encadeamento do raciocínio" (F,162) se constroem teorias. No entanto, na sua perspectiva, não é este campo especulativo que, em matemática, ocupa o lugar a que atribui maior relevância:

> "essencialmente (...) a matemática é a resolução de problemas e penso que é na base da resolução de problemas que ela apareceu" (F,163).

Segundo esta professora, no processo de produção do saber matemático, os axiomas "podem aparecer de uma forma perfeitamente especulativa no sentido de contradizer uma outra realidade, mas também podem aparecer para tentar explicar (...) uma realidade" (F,181). Deste modo, o conhecimento matemático pode avançar por duas vias: "porque aparecem situações da vida real relacionadas com as outras ciências que são colocadas aos matemáticos e que estes tentam resolver" (F,181) ou então, de uma forma especulativa, em que a situação a investigar "não é uma situação real, nem (...) tenta traduzir nada, [mas] é uma situação perfeitamente abstracta e nesse sentido (...) pode servir para alguma coisa ou não" (F,182). Neste último caso, o conhecimento matemático produzido nem sempre é utilizado no imediato, mas, provavelmente, virá a ser utilizado mais tarde (F,181).

Neste contexto, a matemática para Filipa descobre-se e inventa-se (F,185). Descobre-se a partir do momento em que a tentativa de resolução de "problemas colocados, por exemplo, pelas outras ciências (...) [pode conduzir a que] o próprio edifício matemático [tenha] que levar um empurrão" (F,185). Inventam-se teorias quando se constrói "uma realidade completamente diferente" (F,185) sem utilidade de momento, mas que, posteriormente, poderá vir a revelar-se útil, tal como "a história até tem mostrado" (F,185). Para Filipa, "a matemática em muitas coisas até é uma certa aventura no abstracto" (F,180) e, deste modo, tem um mundo que "até permite inventar realidades" (F,195).

Se por um lado, para Filipa, a relevância da matemática está claramente associada à sua utilidade na resolução de problemas colocados pela vida do dia a dia ou pelas outras ciências, por outro lado, levanta-se a questão de quais as razões que, segundo esta professora, poderão levar os matemáticos a inventar teorias.

A caracterização da matemática como "o prazer de pensar e de resolver situações", aliada às afirmações de que "O pensamento tem a sua estética, (...) que o pensamento é uma coisa muito bonita" (F,195), "que o pensamento é das coisas mais fascinantes da aventura humana (...) [e] a matemática é essencialmente pensamento" (F,196), poderá fazer supor que, na base da invenção matemática, poderão estar, para Filipa, razões de natureza extra-lógica, nomeadamente de natureza estética.

Filipa indica que há no homem comum a ideia de que, em matemática, "dois mais dois são quatro e não pode ser outra coisa" (F,183); além disso, há ainda a ideia de que, enquanto ciência, a matemática constitui um sistema fechado. Acentua, no entanto, o seu desacordo relativamente a ambas as afirmações:

- "Esta matemática no fundo serve-nos neste momento porque nos exprime esta realidade. (...) Mas nada me leva a acreditar que este processo não seja todo posto em causa daqui por uns tempos" (F,182).

- "Mas a matemática tem sempre a abertura de tu poderes definir um conjunto de conceitos e a partir daí partires para uma teoria. (...) A matemática até permite inventar realidades. Tem esse mundo" (F,194,195).

No primeiro destes extractos é ainda de destacar que, para Filipa, a matemática que conhecemos "serve-nos neste momento", podendo vir a ser "posta em causa" mais tarde. Esta ideia é consistente com a indicação de que, na sua perspectiva, o conhecimento matemático não é infalível, ou mesmo menos falível, do que o conhecimento noutras ciências (F,183,184).

Para Filipa, a matemática, tal como as outras ciências, está em expansão e não é independente de valores culturais, pois encontra-se "sempre sujeita à época e, no fundo, às correntes filosóficas (...) que contextualizam uma determinada época" (F,194). Em relação às outras ciências, distingue-se porque, sendo uma ciência que pode "estar bastante relacionada com a vida real, de facto não parece" (F,179).

No que se prende com a objectividade e papel da dedução e intuição, Filipa indica que "a matemática em si tem a pretensão de ser objectiva" (F,196) sendo a objectividade associada à "preocupação de ser clara [e] de ser sucinta (F,197). Considerando-a "essencialmente uma ciência dedutiva" (F,195) esta professora acentua, contudo, que no processo de produção matemática "quando se está perante uma realidade que se tenta explicar" (F,197), há uma "fase de colocação de hipóteses [em que] a intuição é extremamente importante" (F,197).

Em suma, para Filipa, a matemática é um mundo de ideias, sujeitas a revisão, construído e constantemente reconstruído pela actividade criadora do homem e que, embora com especificidades próprias, se situa a par das outras ciências. Constitui uma actividade humana de resolução de problemas em que os matemáticos inventam objectos ideais e tentam descobrir factos sobre eles. Sendo uma actividade humana está em expansão, é falível e corrigível e não pode ser vista isoladamente da sua história e aplicações a outras ciências.

Os objectos matemáticos são produzidos como resposta a desafios colocados, tanto por teorias matemáticas já existentes, como por problemas apresentados pelas outras ciências e pela vida real. Filipa reconhece que, nas actividades de produção matemática, há uma face extra-lógica que se entrelaça com a face lógica. Ao conceber o prazer e os aspectos estéticos e intuitivos como componentes intrínsecas à forma de pensamento matemático, parece excluir uma teoria puramente cognitiva da experiência matemática.

Embora as duas entrevistas, realizadas com Filipa, não clarifiquem se esta professora interpreta o processo de produção do saber matemático como um processo de melhoramento de conjecturas, que se faz graças à discussão crítica e à lógica de provas e refutações, também não se encontram aí indicações que vão em sentido contrário.

Assim, se se considerarem as três principais filosofias que, segundo Ernest, são sustentadas pelos professores de matemática (*absolutismo*, *absolutismo progressista* e *falibilismo*) e que foram apresentadas na secção anterior deste capítulo (47), a *filosofia pessoal* de Filipa sobre a matemática parece dirigir-se, preferencialmente, no sentido do *falibilismo*.

<u>O sentido de resolução de problemas em educação matemática</u>

Problema de matemática: Filipa distingue, claramente, um exercício de um problema de matemática:

> "Têm sentidos diferentes. O exercício é uma coisa que no fundo é quase automática porque pode repetir-se n vezes e portanto ganhar-se uma determinada técnica (...) no problema, em princípio não há uma técnica que os alunos tenham adquirido para o resolver" (F,221).

Esta ideia é consistente com a análise que faz das propostas de trabalho incluídas no anexo A (48). Filipa refere, nomeadamente, que a proposta A1 "é essencialmente um exercício de tradução [em que] há uma técnica para resolver o que aqui está" (F,214) e de uma forma geral os alunos do Ensino Secundário "têm um algoritmo para resolver a situação" (F,219).

Quanto à proposta A7, uma situação problemática seguindo a terminologia de Abrantes e Borasi, seria aquela (aliás a única) que gostaria especialmente que os seus alunos fossem capazes de resolver (F,220). Refere-se a esta proposta dizendo que "já é uma situação investigativa" (F,217), "uma situação interessante (...) aquilo que eu considero um problema" (F,218). Indica que aqui os alunos são levados "a experimentar (...) e se calhar depois [a] chegar a uma demonstração," (F,217), a "pensarem numa estratégia para tentar resolver" (F,219) sem, contudo, "conhecerem propriamente nenhum algoritmo para o fazer" (F,219).

Da mesma análise ressalta ainda que, para Filipa, estruturalmente um problema deve incluir no seu enunciado uma questão que indique "o que é que se quer" (F,218). Para lá das propostas que considera exercícios (A1, A5 e A8), rejeita apenas como sendo um problema as propostas de trabalho A6 e A4. De A6 indica que "tem dados e não coloca a questão" (F,218). Quanto a A4 salienta é "uma situação rica" (F,216), "uma situação para pensar, comentar, reflectir sobre como se iriam resolver situações deste tipo" (F,217,218), mas "Demasiado aberta" (F,216) pois não coloca nenhuma questão.

A resposta dada por Filipa, ao pedido de um exemplo concreto de um problema que pudesse trabalhar com os seus alunos, evidencia que, para lá do carácter não rotineiro, um problema de matemática tem uma natureza relativa e subjectiva não exclusivamente proveniente desse carácter:

> "Aquilo que é um problema de matemática para mim nem sempre é um problema de matemática para os alunos. Por exemplo, este ano nós andamos a fazer 'brincadeiras' (...) com divisores comuns em que eles tinham que arranjar um trajecto, um caminho para chegar de um determinado número a outro. (...) Os alunos nunca encararam isso como a resolução de um problema (tinha vários caminhos possíveis, analisar isso) mas encararam-no sempre como uma brincadeira (F,168).

O problema dos divisores comuns, referido neste extracto, é referido por Filipa como sendo "um jogo" (F,175). Para lá dos "jogos", e no âmbito do que considera problemas de matemática, Filipa indica o que designa por "actividades investigativas" (F,193), "brincadeiras" (F,168,172,175), e "problemas que tenham pés e cabeça" (F,173). Ao longo das duas entrevistas realizadas, Filipa foi dando exemplos concretos de situações de ensino por ela organizadas, em que foram trabalhadas, ou propostas aos alunos, actividades integrando estes diversos problemas.

Nas "actividades investigativas", Filipa inclui a proposta de trabalho A7, referindo que aí os alunos têm oportunidade de investigar e, se calhar, chegar a uma demonstração (F,217).

As "brincadeiras", onde estão incluídos os "jogos", constituem uma situação inventada, "quase artificial" (F,173), cujo objectivo é pôr os alunos a resolver um problema (F,172,173). É uma "brincadeira", por exemplo, uma "situação um bocado lúdica para levar os alunos a atingir determinados conteúdos" (F,175) incluídos no programa a ensinar. "Brincadeiras" podem ser também os "jogos" onde, na perspectiva de Filipa, o que está presente "não são os conteúdos mas (...) o programa" (F,175): o que importa é que os alunos analisem situações, encontrem estratégias de resolução, discutam, sistematizem e optimizem essas estratégias (F,175,192,193).

A todas estas "brincadeiras" Filipa contrapõe o que designa por "problemas que tenham pés e cabeça" (F,173). Nestes problemas, relacionados a aplicação e utilidade da matemática, indica que os alunos devem conseguir "pensar que aquilo não é só um jogo e que, de facto, depois vai servir para alguma coisa" (F,173).

Uma vez que a resolução de um problema não resulta da aplicação directa de técnicas anteriormente adquiridas, na perspectiva de Filipa os alunos, na sala de aula, podem demorar "uma hora inteira" (F,207) com um só problema e o professor chegar à conclusão que "até [aproveitou] muito bem o tempo" (F,207):

> "és capaz de estar com um problema, se calhar uma hora inteira. E provavelmente dizes assim: eu se calhar até aproveitei muito bem o tempo, porque eu discuti, porque eu analisei, porque ..." (F,207).

Em síntese, para Filipa, enquanto que um aluno poderá resolver, mecanicamente, um exercício, a partir do momento em que tiver aprendido a técnica necessária, um problema de matemática confronta o aluno (ou o grupo de alunos) com uma descontinuidade entre o ponto em que está e aquele a que quer chegar. Para ultrapassar esta descontinuidade, que poderá assumir formas diversas, há necessidade de elaborar um raciocínio novo. Um problema, para que o seja de facto, deve ser "motivador" (F,216) e possuir um carácter não rotineiro para a pessoa a quem é apresentado.

Resolução de problemas em contextos escolares: Para Filipa, a resolução de problemas "é uma coisa que é importante (...) sobretudo a resolução de problemas aplicada à vida real" (F,161). Na sua perspectiva, o facto de um aluno ser capaz de "analisar uma realidade, retirar os dados (...) pensar numa estratégia" (F,210) ou seja, no fundo, ser capaz de resolver problemas, dá-lhe uma "desenvoltura" (F,210) que o vai preparar quando "confrontado com um problema da sua vida particular" (F,210).

A descrição do trabalho desenvolvido pelos alunos, na resolução do problema-jogo dos divisores comuns, anteriormente referida, fornece alguns elementos sobre como concebe, esta professora, a actividade matemática dos alunos durante a resolução de problemas. Tal actividade consistia em irem explorando todos os "caminhos possíveis" (F,168), através de um "método sistemático" (F,168) que tinham que encontrar, e que lhes permitia abandonar um deles e ir estudar outro, garantindo, contudo, que tinham em conta todas as possíveis situações; além disso, deviam ainda "explicar como é que sistematizaram" (F,168) o trabalho realizado de modo a "chegarem à conclusão de que só existiam dois caminhos e não existiam outros" (F,168). Agindo desta maneira está-se a "fazer matemática" (F,173).

Assim, na resolução de problemas, os alunos fazem matemática encontrando um método, que não conhecem ainda, através de uma actividade que eles próprios desenvolvem. Este método possibilita-lhes explorar uma situação e tomar opções, comunicando em seguida a outros o trabalho que desenvolveram.

Esta caracterização é globalmente consistente com a descrição, feita por Filipa, de como conceberia uma aula do 7º ano Unificado onde pretendesse trabalhar resolução de problemas com os alunos:

> "A primeira fase é tu dares o problema e veres se eles o interpretam, não é? Eles estão a trabalhar em grupo e tu vais circulando e vendo se eles interpretam bem as questões ou não. (...) Depois da fase de entenderem os problemas, é evidente que começam a aparecer várias resoluções diferentes. A questão aí é conseguir explorar depois essas resoluções na turma expondo cada grupo, aos outros colegas, a forma como resolveu" (F,170).

Neste contexto, o papel do professor seria (a) fornecer o problema aos alunos, (b) auxiliá-los na fase da compreensão, (c) apoiá-los na fase da resolução lançando, se necessário, "achas para a fogueira para ver se [os alunos] conseguiriam avançar" (F,170), (d) possibilitar a comunicação dos diversos processos de resolução encontrados pelos grupos de alunos e (e) fomentar a discussão entre todos, de modo a que as "várias resoluções" (F,170) conseguissem ser exploradas.

Embora Filipa se refira várias vezes a situações concretas de actividades de ensino implementadas na sala de aula, que globalmente se enquadram e são coerentes com uma aula de resolução de problemas assim descrita, salienta que, organizar e pôr em prática uma aula concebida deste modo, levanta algumas dificuldades: é uma aula "mais cansativa" (F,175) para o professor; requer que este tenha mais recursos à sua disposição; "Exige um envolvimento maior" (F,175). Além disso, "muito poucas pessoas vão por aí" (F,176) pois há professores de matemática "que não entendem a matemática desta maneira" (F,176).

Do mesmo modo, também não é fácil, segundo Filipa, trabalhar em torno de resolução de problemas "com turmas de trinta alunos (...) em espaços de uma hora" (F,206). Este trabalho, na sua perspectiva, "exigiria que (...) [os professores fossem] capazes de pôr os miúdos a analisar e sistematizar" (F,205). No entanto, "de uma forma geral quando se propõem coisas deste tipo é preocupação [dos alunos] procurar uma receita (...) [e] quando não [a] descobrem (...) ficam logo muito perdidos e extremamente aflitos. E ficam de tal maneira aflitos que quase nos dificultam o trabalho" (F,206).

Assim, para Filipa, uma das grandes dificuldades para a realização de um trabalho em torno de resolução de problemas, provém da "aberração" (F,206), que muitos alunos possuem, acerca do que é a matemática que se deve ensinar e aprender dentro da sala de aula. É como se aí, para os alunos, saber matemática coincidisse apenas com ser capaz de fornecer, num curto espaço de tempo, respostas que possam ser encontradas através da aplicação directa de regras.

No entanto, na sua perspectiva, esta imagem que os alunos têm da matemática não surge por acaso: são os próprios professores, com as actividades que propõem e com os ambientes de ensino da matemática que organizam ao longo dos anos de escolaridade, que contribuem para a sua existência:

> "os miúdos quando são muito pequenitos, até gostam de resolver problemas, no sentido de estarem a fazer 'bonequinhos' e a ver que soluções é que vão arranjar (...) nós 'partimos' um bocado isso e, como vamos dando receitas, os alunos estão à espera que lhes salte logo uma receita, e como não salta..." (F,220).

Para Filipa, as dificuldades que se colocam à realização de um trabalho, sistematicamente organizado em torno de resolução de problemas, não provêm, contudo, apenas da necessidade que os alunos parecem sentir de 'receitas'. A própria natureza da resolução de problemas, tal como esta professora a concebe, comporta também em si algumas dificuldades:

> "Mas o que eu acho é que nem todos os miúdos conseguem, e têm facilidade, de facto, de resolverem problemas. (...) Uma coisa é (...) [o aluno] perceber o que eu estou a explicar, e outra coisa é ele tomar a iniciativa de conseguir olhar para aquilo, ver os dados que tem e os que necessita de retirar para chegar à solução, ver que estratégia é que vai utilizar. Isto torna-se de facto difícil" (F,207)

Assim, só é viável organizar o trabalho nas salas de aula de matemática em torno de resolução de problemas, quando for possível diversificar aí as actividades a realizar com os alunos, de tal modo que uns pudessem "estar a resolver problemas e outros (...) a fazer outras coisas" (F,207), o que exigia que o professor fosse um pouco como o "médico" (F, 208).

Esta diversidade não significa contudo que, para esta professora, apenas os bons alunos podem aprender a resolver problemas. Parece significar, antes, que cada aluno tem um tempo e ritmo próprios para aprender, e que há que ter em conta essa multiplicidade (F,212).

Para Filipa, exigir-se que o professor de matemática organize o seu trabalho na sala de aula de modo a que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas seja um eixo organizador do ensino da matemática, "é estar-se a pedir demais" (F,211), pois embora "muito bonito teoricamente" (F,210) e não impossível, "Na prática é complicado" (F,211).

Da descrição e análise anteriormente apresentadas sobre resolução de problemas em contextos escolares, sobressaem alguns vectores relativos às *representações pedagógicas* de Filipa relativamente à resolução de problemas no âmbito da educação matemática.

Em primeiro lugar, um problema de matemática distingue-se, claramente, de um exercício. Um problema, que pode assumir formas diversas, constitui, para Filipa, um objecto de pesquisa que tem um carácter não rotineiro e uma natureza relativa e subjectiva: é a existência de uma relação particular, entre um indivíduo e uma tarefa, que poderá transformar essa tarefa num problema para o indivíduo. Se se considerar a face objectiva do problema, o seu enunciado deve incluir uma questão que indique o que se pretende.

Em segundo lugar, a actividade de resolução de problemas não é identificada com a aplicação mecânica de técnicas, procedimentos e conceitos anteriormente treinados pelos alunos em contextos não problemáticos; além disso, o seu lugar não se restringe ao de um campo de aplicação de competências anteriormente aprendidas. A resolução de problemas constitui uma actividade que requer reflexão, e que envolve exploração, interpretação e análise de uma situação, bem como a investigação de estratégias diversificadas de resolução e ainda a sua sistematização, comunicação e discussão. Assim, resolver problemas requer um tempo que é singular e qualitativo.

É o professor quem coloca o problema facilitando que os alunos façam intervir, criativamente, o seu conhecimento, na resolução das situações apresentadas. Estes são encorajados a raciocinar por si próprios, em lugar de seguir o professor através de um percurso que conduz à solução; além disso, são responsabilizados por comunicar as conclusões a que chegaram. Assim, têm o controlo sobre os métodos de resolução mas não sobre a forma e conteúdos de ensino, que são controlados pelo professor.

Na perspectiva de Filipa, se, por um lado, a actividade de resolução de problemas pode ser estimulante para alguns alunos, por outro lado pode ser frustante e perturbadora para outros, pois entra em conflito com a imagem que têm da matemática escolar.

Em terceiro lugar, embora ao longo das duas entrevistas realizadas não haja referências explícitas à presença, na sala de aula, da actividade de formulação de problemas pelos alunos, a preferência que Filipa manifesta pela proposta de trabalho A7 (uma situação problemática, na terminologia de Abrantes e Borasi, onde a actividade de formulação de problemas está intrinsecamente envolvida no processo de resolução) e o gosto que revela em que os seus alunos sejam capazes de a resolver (a única que escolhe), leva a supôr que esta professora está desperta para a importância daquela dimensão. Esta ideia é reforçada quando se observa que a actividade de formulação de problemas pelos alunos está presente, e é explicitamente reconhecida, no Projecto dos Descobrimentos que lhes propôs.

Em quarto lugar, situando-nos em referência a Stanic e Kilpatrick (49), e aos temas que indicam quanto aos possíveis papéis da resolução de problemas, relativamente ao currículo de matemática, parece poder dizer-se que a interpretação de Filipa integra a necessidade desta percorrer os diversos temas. A resolução de problemas parece constituir, para esta professora, um contexto de aprendizagem, uma competência a adquirir e uma arte a aprender.

De facto, o pensamento de Filipa sobre a educação, o ensino, e a resolução de problemas, parece ter certos pontos de contacto com o pensamento de Pólya (50). Para Pólya, o ensino é uma arte. Esta ideia é compatível com a perspectiva do professor como um artista, sustentada por Filipa. Para ambos, o principal objectivo da educação é ensinar os mais novos a pensar, e seria preferível o professor centrar a sua atenção em problemas realmente significativos, e tratá-los vagarosamente, mais do que percorrer, com pressa, todos os detalhes de um programa demasiado extenso.

A perspectiva que, segundo Lester (51), Pólya encoraja, é a de que a apresentação do conteúdo matemático seja feita no contexto de problemas a serem resolvidos, ou seja, que se ensine matemática através da resolução de problemas. Embora as duas entrevistas realizadas com Filipa façam emergir que, para esta professora, a resolução de problemas constitui uma via educativa para o ensino da matemática, diversos constrangimentos dificultam que esta abordagem seja adoptada, na prática da sala de aula, sistematicamente, para todo o currículo.

Finalmente, se se tiverem em conta as três funções que Borralho (52) indica para os problemas (função de ensino, função educativa e função de desenvolvimento), parece poder dizer-se que Filipa propõe aos alunos problemas de matemática procurando articular estas três funções: (a) ao resolver problemas os alunos são levados a desenvolver, criar, ou aplicar determinados conhecimentos matemáticos para obter as respostas (função de ensino); (b) ao propor problemas aos alunos, nomeadamente no âmbito de projectos, Filipa visa promover um posicionamento crítico face aos fenómenos e factos naturais e sociais, preocupando-se em fomentar o desenvolvimento pessoal do aluno (função educativa) e, além disso, (c) preocupa-se com o seu desenvolvimento intelectual (função de desenvolvimento). Assim, a resolução de problemas pode constituir um meio de ensino e aprendizagem propício à formação multifacetada e global dos alunos.

Notas

(1) A expressão entre aspas é utilizada por Andrade. Ver ANDRADE (A.J.), 1988, Le Sens des Mathématiques. Contribution à une Compréhension Personnalisée de leur Apprentissage, Mémoire présenté pour l'obtention du Diplôme d'Études Approfondies (Sciences de l'Éducation), Tours, p.47.

(2) Expressão utilizada por SANTOS (M.E.), 1991, Mudança Conceptual na Sala de Aula - Um Desafio Pedagógico, Lisboa, Livros Horizonte, p.19.

(3) Expressão utilizada por GUIMARÃES (H.), 1988, Ensinar Matemática: Concepções e Práticas, Tese Apresentada para Obtenção do Grau de Mestre em Educação, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, p.56.
Refere-se que o presente trabalho de investigação é de inspiração etnográfica, uma vez que tem como pressupostos algumas das linhas orientadoras de estudos etnográficos.
Ver GOETZ (J.), LECOMPTE (M.), 1984, Etnography and Qualitive Design in Educational Research, London, Academic Press Inc, Harcourt Brace Jovanovich, Publishers.
Goetz e Lecompte referem, na p.7, que um processo de ilustrar as componentes de um 'desenho' etnográfico é compará-lo com componentes típicos de um 'desenho' experimental. Nas pp.7-12 apontam, entre outras, as distinções a seguir indicadas entre pesquisas experimentais e etnográficas.
A primeira distinção refere-se à natureza dos objectivos das duas pesquisas. Os étnografos tentam descrever, sistematicamente, as características das variáveis e dos fenómenos, gerar e aperfeiçoar categorias conceptuais, descobrir e validar associações entre esses fenómenos, evitando assumir, à priori, constructos ou relações causais. Contrariamente, a pesquisa experimental orienta-se para a verificação ou teste dedutivo de proposições causais que foram desenvolvidas fora do terreno de pesquisa.
Uma outra distinção entre os dois tipos de pesquisa diz respeito à escolha da amostra. Uma vez que o objectivo de muitos dos desenhos experimentais é generalizar as conclusões obtidas, a partir da amostra estudada, a outras populações, há que dar muita atenção à dimensão da amostra e ao controlo de variáveis. Os étnografos, por outro lado, dependem menos de uma amostragem probabilística. Podem escolher os fenómenos a estudar porque são semelhantes, ou porque diferem, sistemáticamente, dentro de dimensões particulares. "Comparability" e "Translatability" (p.9) são factores cruciais que legitimam a pesquisa etnográfica. Ambas evidenciam a importância da clareza e explicitação quer das características do grupo ou fenómeno estudado, quer das categorias de análise geradas.
Uma terceira distinção reside no facto dos etnógrafos admitirem experiências subjectivas, tanto do investigador como dos participantes, no campo de pesquisa. Para os investigadores experimentais, a construção precisa e antecipada de um 'desenho' e a rejeição da hipótese nula são, entre outras, as estratégias adoptadas para demonstrar a fiabilidade e validade dos seus resultados experimentais. Assim, tentam afastar a questão da subjectividade, enquanto os etnógrafos abordam esta questão tentando incorporá-la.
Uma quarta distinção baseia-se no facto de os pesquisadores etnográficos estudarem, tipicamente, fenómenos que ocorrem naturalmente, mais do que estudar os que podem ser manipulados anteriormente sob condições frequentemente controladas pelo investigador, o que não acontece com os pesquisadores experimentais.

(4) Citados por CRUZ (N.), 1989, Utilização de Estratégias Metacognitivas no Desenvolvimento da Capacidade de Resolução de Problemas - Um Estudo com Alunos de Física e Química do 10º Ano, Tese de Mestrado em Educação, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, p.25.

(5) GHIGLIONE (R.), MATALON (B.), 1978, Les Enquêtes Sociologiques, Theories et Pratique, Paris, Armand Colin, p.58.

(6) PATTON (M.), 1980, "Qualitative Interviewing" in Qualitative Evaluation and Research Methods, London, Sage, p.205.

(7) GHIGLIONE (R.), MATALON (B.), 1978, op. cit., p.75.

(8) PATTON (M.), 1980, op. cit., p.200.

(9) Estas indicações são dadas por GHIGLIONE (R.), MATALON (B.), 1978, op. cit., bem como por PATTON (M.), 1980, op. cit. Ver em especial, e respectivamente, as pp.75,76 e p.202.
A expressão "entrevistas feitas a partir de um guião standard" é utilizada por Patton.
(10) PONTE (J.P.), 1992, Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação, in Educação Matemática, Colecção Temas de Investigação, Instituto de Inovação Educacional, Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, p.230.
(11) THOMPSON (A.), 1992, "Teachers' Belifs and Conceptions: A Synthesis of the Research" in Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, D.A. Grouws (Ed.), A Project of The National Council of Teacher of Mathematics, New York, Macmillan Publishing Compay, p.139.
(12) Ver HUBERMAN (M.), 1989, "Synthese et Conclusions" in La Vie des Enseignants - Évolution et Bilan d' une Profession, Neuchâtel, Delachaux & Niestlé, pp.309-328.
(13) As transcrições totais de todas as entrevistas realizadas são incluídas no segundo volume do presente trabalho de investigação. A apresentação destas transcrições segue a ordem alfabética dos pseudónimos escolhidos para os professores entrevistados.
(14) COONEY (T.), 1985, "A Beginning Teacher's View of Problem Solving" in Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 16, No. 5, National Council of Teachers of Mathematics, p.326.
(15) ABRANTES (P.), 1988, "Um (Bom) Problema (Não) é (Só)..." in Educação e Matemática, Nº 8, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, pp.7,8,9,10,35. BORASI (R.), 1986, "On the Nature of Problems" in Educational Studies in Mathematics, Vol. 17 (2), pp.125-141.
(16) GARDNER (M.), 1990, Ah, Descobri, Gradiva, Lisboa, p.109.
(17) GUIMARÃES (H.), 1988, op. cit., p.207.
(18) Extracto da segunda entrevista realizada com Artur e cuja transcrição se apresenta no segundo volume do presente trabalho de investigação.
(19) BARDIN (L.), 1977, Análise de Conteúdo, Lisboa, Edições 70, p.42.
(20) Ibid, p.39.
(21) Ibid, p.29.
(22) Referidos por BARDIN (L.), ibid, p.28.
(23) BARDIN (L.), ibid, pp.95,96.
(24) A definição de *corpus* é apresentada por BARDIN (L.), ibid, p.96.
(25) Ibid, p.75.
(26) Ibid, p.104. A definição de *tema* é apresentada por BERELSON, citado por BARDIN, (L.), 1977, ibid, p.105. A propósito do significado de tema, Bardin, na mesma página, cita Unrug que refere que um tema é uma unidade de significação complexa, de comprimento variável. Pode ser constituído tanto por uma afirmação como por uma alusão; inversamente, um tema pode ser desenvolvido em várias afirmações (ou proposições).
(27) BARDIN (L.), ibid, pp.117,118, define as categorias como rúbricas ou classes, as quais reunem um grupo de elementos sob um título genérico, agrupamento esse efectuado em razão dos caracteres comuns desses elementos. Refere ainda que o critério de categorização pode ser semântico, estando-se nesse caso perante categorias temáticas.
(28) A propósito da problemática da categorização e análise de conteúdo Bardin refere que, quando o sistema de categorias não é fornecido, mas antes resulta da classificação analógica e progressiva dos elementos, o título conceptual de cada categoria bem como as categorias terminais somente são obtidas no final da análise. Ver BARDIN (L.), ibid, p.119.
(29) O anexo 2, apresentado em volume separado, é constituído pela transcrição total das entrevistas realizadas com os professores Artur, Beatriz, Eloísa e Filipa.
No presente trabalho de investigação os critérios seguidos na utilização dos extractos das transcrições foram os seguintes:
• Respeitar textualmente a pontuação existente nas transcrições originais. Por exemplo, as letras maiúsculas que na transcrição indicavam o início das frases são mantidas nos extractos incluídos na análise mesmo que estes extractos apareçam no meio de uma frase relativa a essa análise.
• Escrever dentro de [] tempos de verbos diferentes dos utilizados pelos professores quando estes, durante as entrevistas, falam na primeira pessoa ou utilizam o discurso directo.
• Utilizar [] para incluir palavras ou expressões pronunciadas pelos professores (ou com o mesmo significado das pronunciadas por estes) e associadas ao extracto

utilizado sempre que tal seja necessário para ajudar a compreender o significado desse extracto.

• Utilizar (...) para indicar que se omitiu uma parte do extracto utilizado. As omissões foram feitas com o cuidado de não deturpar a informação fornecida pelo professor.

(30) GUIMARÃES (H.), 1992, "Concepções, Práticas e Formação de Professores" in Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação, in Educação Matemática, Colecção Temas de Investigação, Instituto de Inovação Educacional, Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, p.252.

(31) Estes modelos foram apresentados na segunda secção do primeiro capítulo desta terceira parte do estudo, a partir de uma revisão de literatura de investigação efectuada por Thompson sobre concepções dos professores relativas à matemática e ao seu ensino.
Ver THOMPSON (A.), 1992, "Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research" in Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, D.A. Grouws (Ed.), A Project of The National Council of Teacher of Mathematics, New York, Macmillan Publishing Compay, pp.127-146.

(32) Ver ERNEST (P.), 1992, "Problem Solving: Its Assimilation to the Teacher's Perspective" in Mathematical Problem Solving and New Information Techologies, Research in Contexts of Practice, J.P. Ponte, J.F. Matos, J.M. Matos, D. Fernandes (Eds.), NATO ASI Series, Series F: Computer and Systems Sciences, Vol. 89, Berlin, pp.287-300.
O pensamento de Ernest relativamente a esta temática foi apresentado na segunda secção do primeiro capítulo desta terceira parte do estudo.

(33) O anexo A encontra-se incluído no anexo 1 e é apresentado no final do primeiro volume do presente trabalho de investigação.

(34) O anexo B encontra-se incluído no anexo 1 e é apresentado no final do primeiro volume do presente trabalho de investigação.

(35) Ver STANIC (G.), KILPATRICK (J.), 1990, "Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum" in The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving, third printing, R. Charles & E. Silver (Eds.), Reston, Virginia, Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics, pp.1-22. Esta categorização foi apresentada na segunda secção do primeiro capítulo da segunda parte do presente trabalho.

(36) BORRALHO (A.), 1991, "Funções dos Problemas no Processo Ensino/Aprendizagem da Matemática", in Educação e Matemática, Nº 17, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, p.13.

(37) Ver nota (31)

(38) ERNEST (P.), 1992, op. cit., Ver nota (32).

(39) O anexo A é apresentado no final do primeiro volume deste trabalho.

(40) ABRANTES (P.), 1988, "Um (Bom) Problema (Não) é (Só)..." in Educação e Matemática, Nº8, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, pp.7,8,9,10,35. Esta terminologia foi apresentada na primeira secção do primeiro capítulo da segunda parte deste trabalho.

(41) STANIC (G.), KILPATRICK (J.), 1990, op. cit. Ver nota (35)

(42) Ver nota (31)

(43) ERNEST (P.), 1992, op. cit. Ver nota (32).

(44) O anexo A é apresentado no final do primeiro volume deste trabalho.

(45) STANIC (G.), KILPATRICK (J.), 1990, op. cit. Ver nota (35).

(46) Ver nota (31)

(47) ERNEST (P.), 1992, op. cit. Ver nota (32).

(48) O anexo A é apresentado no final do primeiro volume deste trabalho.

(49) STANIC (G.), KILPATRICK (J.), 1990, op. cit. Ver nota (35).

(50) Ver, nomeadamente, ponto 2.3 do primeiro capítulo da segunda parte do presente trabalho.

(51) Ver LESTER (F.Jr.), 1980, "Research on Mathematical Problem Solving" in Research in Mathematics Education, R.J. Shumway (Ed.), Reston, National Council of Teachers of Mathematics, pp.286-323.

(52) Ver Borralho, 1991, op. cit.

Conclusão da Terceira Parte

Esta terceira parte do estudo centrou-se na pesquisa e compreensão de perspectivas filosóficas dos professores sobre a matemática e perspectivas sobre o ensino e aprendizagem desta disciplina, em contextos escolares, relacionadas, nomeadamente, com a resolução de problemas.

Neste âmbito, apresentou-se, no primeiro capítulo, uma revisão de literatura de investigação relacionada com esta problemática. O segundo capítulo, constituiu a contribuição empírica da presente investigação para a compreeensão da mesma problemática. Neste último capítulo, e tendo subjacentes as questões de investigação, procurou-se compreender as *representações pedagógicas* de alguns professores relativas à resolução de problemas, bem como as suas *filosofias pessoais* sobre matemática. A expressão *representação pedagógica* constitui uma expressão heurística útil, convencionada pelo investigador, para designar as *representações pessoais* dos professores relacionadas com a interpretação que concedem a resolução de problemas perspectivada no âmbito da educação matemática.

No segundo capítulo desta terceira parte do estudo, foram analisadas as transcrições totais de oito entrevistas, semi-estruturadas, conduzidas junto de quatro professores de matemática que leccionam esta disciplina ao nível do terceiro Ciclo do Ensino Básico ou do Ensino Secundário, e, relativamente a cada um destes professores, foi apresentada uma descrição e interpretação dos dados considerados pertinentes.

Não se pretende alongar este trabalho elaborando uma conclusão que sintetize tudo que anteriormente foi dito. No entanto, tendo em conta os objectivos da presente investigação (pesquisar e compreender as representações pessoais dos professores relativas a problema e resolução de problemas no âmbito da educação matemática e explorar possíveis relações entre estas representações e as suas filosofias pessoais sobre matemática) e o quadro teórico apresentado ao longo das três partes que a constituem, importa chamar a atenção para alguns pontos, de entre os vários, que parecem merecer um especial destaque.

Esta conclusão inicia-se com a apresentação de observações de carácter geral, relacionadas com a matemática e o seu ensino, que se prendem com a análise das transcrições das entrevistas, realizadas aos quatro professores, e com a própria realização das mesmas entrevistas (Ponto A).

Em seguida, apresenta-se um quadro síntese (Quadro IX) das *filosofias pessoais* sobre a matemática sustentadas por cada um desses professores (Artur, Beatriz, Eloisa e Filipa), bem como das suas representações pedagógicas relativas a resolução de problemas (Ponto B). Será a partir deste quadro que se farão ressaltar, inicialmente, diferentes sentidos atribuídos a problema e resolução de problemas (Ponto C) e, em seguida, se explorarão possíveis relações entre estes sentidos e as suas *filosofias pessoais* sobre matemática (Ponto D).

Ponto A - A matemática e o seu ensino

A_1: A matemática enquanto ciência

Em primeiro lugar, importa salientar que, tal como tinha sido já evidenciado por anteriores investigações, também no presente estudo, globalmente, não foi simples falar com os professores entrevistados sobre matemática enquanto ciência. Embora as entrevistas corressem fluidas, relativamente à generalidade das restantes questões colocadas, quando se abordou essa temática, as respostas obtidas foram frequentemente vagas, curtas, hesitantes, ou mesmo ausentes, e, nalguns casos, parecendo mais o fruto da explicitação de uma *representação social* comum sobre a matemática do que o resultado de uma análise reflectida e pessoal sobre o objecto da ciência que ensinam.

Por vezes, manifestou-se tendência acentuada, por parte de alguns dos professores, para restringir a matemática à sua dimensão de disciplina escolar. Esta tendência tinha, também, já sido encontrada por outros estudos desenvolvidos quer em Portugal quer noutros países. Entre estes encontra-se, nomeadamente, uma revisão de literatura sobre a problemática das concepções dos professores de matemática elaborada por Thompson (1).

Esta autora chama concretamente a atenção para que muitos dos professores participantes em investigações desenvolvidas nos Estados Unidos, mesmo os que possuem uma formação matemática de nível superior, apresentam uma perspectiva limitada e estática da matemática, manifestando-se ausência de um conhecimento histórico e filosófico fundamentado sobre esta ciência.

A_2 - A uniformidade de uma aula de matemática típica

Em segundo lugar, é de referir que as descrições apresentadas pelos professores entrevistados sobre o que constitui uma aula de matemática típica, no sentido de mais usual, parecem concordar com o que, no segundo capítulo da segunda parte do presente estudo, foi designado por *ensino da matemática típico* (2).

Uma aula de matemática típica foi, globalmente, descrita como uma sequência de momentos, que se repetem de aula para aula sempre pela mesma ordem, e onde a resolução de exercícios ocupa a maior parte do tempo lectivo. A lógica de organização parece seguir, de perto, um modelo que Herbat (3) formalizou no século XIX: o professor enquadra o que vai ensinar no contexto da aula anterior, em seguida expõe o que de novo há para aprender, após o que se fazem exercícios de verificação, confirmação e auto-consolidação do que foi exposto.

Apesar dos limites que alguns dos professores indicaram relativamente ao que constituem actividades típicas para ensinar e aprender matemática na Escola, as descrições que elaboraram permitem destacar a natureza convergente de muita da matemática escolar e a presença, nas actividades de ensino e aprendizagem, de uma forte vertente de uniformidade marcada pela resolução de exercícios.

Considerando a sala de aula de matemática como um sistema socialmente organizado, a presença desta uniformidade associada à ênfase na resolução de exercícios, para lá de dificultar a evolução deste sistema para formas mais complexas e ricas em informação, entra em conflito com a diversidade dos modos de aprender dos diferentes alunos, com o desenvolvimento do seu *poder matemático* (4) e, ainda, com muitas das actuais recomendações relativas à resolução de problemas quando considerada enquanto via educativa para o ensino e aprendizagem da matemática.

Ponto B - Quadro síntese das representações pedagógicas sobre resolução de problemas e das filosofias pessoais sobre matemática

Inclui-se, neste ponto, um quadro síntese (Quadro IX) das interpretações de problema e resolução de problema construídas pelos quatro professores entrevistados, bem como das suas filosofias pessoais sobre matemática. Para referir estas filosofias utilizar-se-á uma categorização proposta por Ernest, que foi apresentada no primeiro capítulo desta terceira parte do estudo (5).

Importa ter em conta que o Quadro IX, tal como qualquer outro quadro, pela própria estrutura não comporta necessariamente nem a riqueza e complexidade da informação recolhida junto dos professores, nem mesmo todas as vertentes da descrição e análise anteriormente elaborada relativamente a cada um. No entanto, poderá possibilitar, potencialmente, uma melhor visualização e leitura das principais tendências e diferenças encontradas.

	Filosofia pessoal	Interpretação de problema de matemática	Interpretação de resolução de problemas
A r t u r	Globalmente consistente com o absolutismo.	• Utilização quase indiferenciada dos termos problema e exercício; • problemas/exercícios: questões explicitamente formuladas e auto-suficientes em termos de informação; • não é tido em conta o carácter não rotineiro dos problemas nem são considerados problemas enquanto objectos de pesquisa.	• Resolução de problemas/exercícios: resolução de questões de resposta curta e única colocadas pelo professor e cuja solução deve ser obtida num curto espaço de tempo, mediante a aplicação de regras e procedimentos anteriormente modelados pelo professor; • resolução de problemas/exercícios: componente prática do ensino da matemática que se segue às exposições do professor.
B e a t r i z	Tendência para absolutismo; traços de absolutismo progressista.	• Globalmente há distinção entre problema e exercício; • problema: questão de carácter não rotineiro, de resposta certa, auto-suficiente em termos de informação e cuja resolução requer um esforço intelectual criativo; predominantemente associados a problemas para equacionar.	• Funções dos problemas: interessar os alunos, mostrar-lhes a utilidade da matemática e proporcionar a introdução e aplicação de alguns conceitos; pontualmente possibilitar que se divirtam com a matemática já aprendida; • nas aulas de resolução de problemas os problemas são fornecidos pelo professor, que em seguida orienta os alunos, explicando-lhes o que têm que fazer; consoante as características das turmas, os alunos trabalham, ou não, em grupo.
E l o í s a	Tendência para absolutismo progressista.	• Distinção entre problema e exercício fundamentalmente baseada no carácter não rotineiro e relativo dos problemas e na necessidade do seu enunciado incluir a descrição de uma situação acerca da qual se colocam questões; • problemas: auto-suficientes em termos de informação e cuja resolução requer um esforço intelectual criativo.	• Resolução de problemas: elemento potencialmente motivador que antecede a apresentação de alguns conteúdos matemáticos feita pelo professor, ou actividade que se segue à transmissão dos conteúdos matemáticos necessários à sua resolução; • resolução de problemas: foca-se em aspectos isolados do currículo e destina-se a enriquecer o ensino; • a resolução de problemas no âmbito do currículo de matemática desempenha os papéis de justificação, motivação e prática.
F i l i p a	Tendência para falibilismo.	• Distinção clara entre exercício e problema; • distinção entre vários tipos de problemas e utilização de terminologia diversificada; • problema: objecto de pesquisa que tem um carácter não rotineiro e uma natureza relativa e subjectiva; deve incluir no enunciado a indicação clara do que se pretende, requer a elaboração de raciocínios criativos e envolve um tempo de resolução que é pessoal e pode ser longo.	• Actividade de resolução de problemas: actividade que requer reflexão e envolve exploração, interpretação e análise de uma situação, investigação de estratégias diversificadas de resolução, sistematização, comunicação e discussão dessas estratégias; o professor coloca os problemas, encoraja os alunos a raciocinar por si próprios e facilita que façam intervir criativamente o seu conhecimento; • preocupação com a diversidade de problemas a trabalhar com os alunos: os problemas são propostos visando articular funções de ensino, de educação e de desenvolvimento; • preocupação de integrar a actividade de formulação de problemas nas actividades de ensino; • emergência da resolução de problemas enquanto via educativa para o ensino e aprendizagem da matemática.

Quadro IX

Ponto C - Diferentes sentidos para problema e resolução de problemas

Em primeiro lugar, a leitura do Quadro IX faz emergir que os *problemas* e a *resolução de problemas* não são igualmente interpretados pelos professores.

A análise das entrevistas tinha já evidenciado que, embora, na generalidade, houvesse acordo entre os professores relativamente ao que constitui um exercício de matemática, o mesmo não se passava relativamente a problema.

Globalmente, a resolução de um exercício foi interpretada como a execução de uma tarefa, mais ou menos rotineira, de aplicação directa de conceitos, regras e procedimentos anteriormente ensinados pelo professor; visaria os aspectos mecânicos da aprendizagem; não exigiria a descoberta ou invenção de estratégias de resolução nem a tomada de decisões.

Diferentemente, o Quadro IX permite destacar diversos sentidos para problema de matemática e resolução de problemas. Estes sentidos vão influenciar o papel e lugar que cada professor concede à resolução de problemas no âmbito do currículo escolar de matemática.

As representações pedagógicas sobre resolução de problemas sustentadas por Artur, Beatriz, Eloísa e Filipa podem agrupar-se em torno de três temas:

Tema (i) - <u>Problemas como exercícios: ausência de problemas enquanto objectos de pesquisa:</u>

Para Artur problemas são fundamentalmente sinónimos de exercícios, não sendo interpretados ou valorizados enquanto objectos de pesquisa. Os problemas/exercícios devem estar necessária e directamente relacionados com os conteúdos matemáticos incluídos no programa escolar do nível de ensino a leccionar. Caso contrário são considerados como não apropriados à matemática escolar e encarados como pura perda de tempo.

A resolução de problemas, é antes de mais, interpretada como a actividade de resolução de exercícios que se segue às exposições teóricas apresentadas pelo professor. Os problemas/exercícios, que devem ser resolvidos num curto espaço de tempo, exercem a sua função de ensino ao possibilitarem que os alunos treinem regras e procedimentos de cálculo. Assim, relativamente ao currículo escolar de matemática, à resolução de problemas/exercícios é exclusivamente reservado o papel de proporcionar a prática necessária à aprendizagem de procedimentos anteriormente modelados pelo professor.

Tema (ii) - <u>Problemas como um conteúdo a ser 'somado' ao currículo de matemática:</u>

Este tema destaca-se a partir das representações pedagógicas relativas à resolução de problemas construídas por Beatriz e por Eloísa. Predominantemente, é assim que estas duas professores interpretam os problemas e a resolução de problemas perspectivadas no âmbito da educação matemática.

Ambas estabelecem uma distinção, mais ou menos clara, entre exercícios e problemas de matemática. Apesar das singularidades encontradas, essa distinção baseia-se, sobretudo, no facto dos problemas constituirem tarefas não rotineiras, de algum modo mais elaboradas que os exercícios e cuja resolução requer a realização de um esforço mental criativo. Este esforço não se esgota na aplicação directa e imediata de competências anteriormente aprendidas, função essa que ficaria reservada aos exercícios.

Estruturalmente, nos problemas haverá necessidade da descrição de uma situação que os alunos devem interpretar, e de uma questão que indique o que se pretende, a que os alunos devem tentar responder. É o professor quem propõe os problemas, incluindo-os nas actividades de ensino relacionadas com os assuntos do programa de matemática que considera especialmente vocacionados para o efeito.

A resolução de problemas é considerada como a realização das actividades consideradas problemas. Aqui, a estratégia de resolução é, frequentemente, única e antecipadamente conhecida pelo professor.

À resolução de problemas é reservado o papel de motivar e justificar a aprendizagem da matemática e além disso de proporcionar a prática para a aprendizagem de competências anteriormente ensinadas; por vezes, pode desempenhar outros papéis, entre os quais constituir um meio dos alunos se divertirem com a matemática já aprendida, como acontece, por exemplo, no caso de Beatriz.

De qualquer modo a resolução de problemas é considerada como uma actividade pontual, destinada a enriquecer o ensino, e que ocorre algumas vezes ao longo do ano lectivo, não sendo interpretada como uma via educativa a adoptar relativamente ao currículo de matemática.

Tema (iii) - Emergência de resolução de problemas enquanto via educativa para o ensino e aprendizagem da matemática na Escola:

No âmbito da educação matemática, Filipa interpreta, fundamentalmente, os problemas como objectos de pesquisa que podem assumir formas diversas e visar objectivos variados. Para esta professora a resolução de problemas não se restringe à aplicação directa de assuntos matemáticos anteriormente estudados. A actividade de resolução de problemas, que requer um tempo que é pessoal e pode ser mais ou menos longo, envolve a exploração de questões, a investigação de estratégias de resolução variadas e a comunicação e discussão dessas estratégias.

É reconhecida a existência de diferentes tipos de problemas, sendo utilizada terminologia diversa para os distinguir; é ainda reconhecido o carácter não rotineiro e a natureza subjectiva do conceito de problema. Uma tarefa é um problema para um aluno se este o considerar como tal e se se sentir motivado para a resolver.

Procura-se que os problemas sejam diversificados: devem chegar de vários campos, revestir-se de formas variadas, resolver-se apenas pelo prazer de pensar ou visando a aplicação da matemática a situações do mundo real; devem ainda envolver processos, estratégias, conteúdos, tempos e espaços diversos.

Relativamente ao currículo escolar de matemática, há a preocupação dos problemas poderem cumprir múltiplas funções: função de ensino, função educativa e função de desenvolvimento (6). Filipa encoraja os alunos a raciocinar criativamente, por si próprios, em lugar de os conduzir através do caminho que conduz, seguramente, à solução. Mantém, porém, o controlo sobre o conteúdo e metodologias de ensino.

A dimensão da matemática enquanto ciência a fazer é integrada na resolução de problemas. Filipa considera que o conhecimento matemático não é passivamente recebido pelos alunos e que estes fazem matemática quando resolvem problemas. Para resolver problemas tudo o que parece ser necessário, para Filipa, é uma questão oriunda do professor.

Sendo os problemas interpretados como objectos de pesquisa que podem assumir formas diversas e visar objectivos variados, procura-se que o papel da resolução de problemas relativamente ao currículo escolar de matemática seja plural. Tendo como referência Stanic e Kilpatrick (7), poder-se-á dizer que Filipa evidencia a preocupação da resolução de problemas constituir um contexto de ensino e aprendizagem, uma competência que pode ser aprendida e uma arte que deve ser ensinada.

Emerge, assim, a resolução de problemas como uma *via educativa para o ensino e aprendizagem da matemática* (8) na Escola, que se contrapõe a um ensino marcado pela uniformidade de actividades e processos de trabalho e onde a ênfase é, acima de tudo, colocada na memorização de definições, na aprendizagem de regras e de técnicas, na resolução de exercícios. A resolução de problemas enquanto via educativa vai orientar a definição de objectivos de ensino, a selecção de metodologias e a organização de actividades a implementar na sala de aula.

Ponto D - Filosofias pessoais sobre matemática e representações pedagógicas relativas à resolução de problemas

A análise do Quadro IX evidencia que, se considerarmos as duas perspectivas alternativas sobre a matemática destacadas por Lerman (9) a partir das escolas de pensamento sobre a filosofia da matemática, três dos quatro professores participantes no presente estudo (Artur, Beatriz e Eloísa) apresentam *filosofias pessoais* tendencialmente *absolutistas*.

Estas filosofias não são, contudo, coincidentes. Em Artur a perspectiva *dualista* da matemática (10) e a *matemática instrumental* (11) em que importa mais *como fazer* do que *porque fazer*, parecem ser dominantes. Eloísa, situar-se-á, relativamente a Artur, no outro extremo do *absolutismo*. Seguindo Ernest (12), a sua *filosofia pessoal* tenderá para o *absolutismo progressista*, sendo a matemática considerada como uma estrutura consistente e interligada onde a actividade humana desempenha um papel criador no desenvolvimento de novo conhecimento. Beatriz, sustenta, uma filosofia pessoal predominantemente *absolutista*, embora com traços de *absolutismo progressista*.

Diferentemente de Artur, Beatriz e Eloisa surge Filipa que sustenta relativamente à matemática uma perspectiva filosófica tendencialmente *falibilista* (13).

As *representações pedagógicas* dos quatro professores entrevistados relativas à resolução de problemas apresentam também diferenças, confirmando-se a existência de influências entre estas representações e as filosofias pessoais que sustentam relativamente à matemática. A existência destas influências tinha sido já assinalada por outras investigações, algumas dos quais apresentadas no primeiro capítulo desta terceira parte do estudo.

Artur, para quem a matemática constitui uma ciência em que já está tudo inventado e para quem o fazer matemática parece ser, antes de mais, seguir regras, considera, globalmente, os problemas como sinónimos de exercícios e reserva-lhes a função de treinar os alunos para que possam aprender essas regras.

Por seu lado, para Beatriz e Eloísa que, relativamente à matemática, parecem valorizar, mais que Artur, aspectos compreensivos face a aspectos mecânicos, os problemas são considerados enquanto objectos de pesquisa, distintos dos exercícios, e cuja função é, essencialmente, enriquecer o ensino (Tema (ii)).

Para Filipa, que sustenta uma perspectiva filosófica predominantemente falibilista, a matemática constitui um campo em expansão, criado pelo homem, sujeito a revisões e simultaneamente descoberto e inventado a partir de problemas colocados por um movimento interno de desenvolvimento da própria matemática e pelo mundo real. Para Filipa a resolução de problemas aproxima-se de uma via educativa para o ensino e aprendizagem da matemática (Tema (iii)).

Se tivermos em conta os critérios que presidiram à selecção dos professores convidados a participar no estudo, e considerarmos os dois tipos de formação académica que os professores entrevistados possuem (Licenciatura em Matemática e Bacharelato em Engenharia), não se evidencia, relativamente a estes professores, nenhuma relação entre a sua formação académica e as filosofias pessoais sobre a matemática.

De facto, os dois professores bacharéis em Engenharia (Artur e Eloísa) sustentam, respectivamente, uma filosofia pessoal absolutista/instrumentalista e absolutista progressista. Das duas professoras licenciadas em matemática, Beatriz, apresenta uma filosofia pessoal predominantemente absolutista (com traços de absolutismo progressista), enquanto que a perspectiva filosófica de Filipa se dirige para o falibilismo.

Como anteriormente foi referido, o presente trabalho de investigação confirmou a existência de influências entre *filosofias pessoais* dos professores sobre matemática e as suas *representações pedagógicas* relativas à resolução de problemas. Reforça-se, contudo, a ideia, já desenvolvida na *Nota conclusiva* do primeiro capítulo desta terceira parte do estudo, de que a natureza destas influências não é de causalidade imediata. Ou seja, no contexto do ensino e aprendizagem da matemática na Escola, parece redutor olhar as representações pessoais dos professores relativas à resolução de problemas como consequências lógicas e directas determinadas pelas suas filosofias pessoais sobre a matemática.

A par das influências exercidas por estas filosofias, as representações pedagógicas dos professores relativas à resolução de problemas parecem ser, também, influenciadas pelas suas representações pessoais sobre os objectivos do ensino e aprendizagem da matemática escolar, bem como sobre a natureza do ensino em geral e do ensino da matemática em particular.

Além disso, essas representações pedagógicas parecem não ser imunes, nomeadamente, às oportunidades e constrangimentos proporcionados pelo contexto social das escolas em que os professores trabalham, a pressões sociais relacionadas com o facto da aprendizagem da matemática curricular constituir, actualmente, um factor de selecção para inúmeras áreas profissionais socialmente valorizadas e a expectativas dos alunos e dos pais relativamente ao que deve ser o ensino da matemática na Escola.

Perspectivar a resolução de problemas como um processo de investigação onde os conceitos podem ser aprendidos e as competências desenvolvidas, parece exigir que o professor, para lá de uma boa preparação científica, encontre processos que permitam a manutenção de uma pequena quantidade de controle na sala de aula, lide com situações de incerteza e, talvez mais importante do que isso, que possua um elevado nível de autonomia e desenvolva a capacidade de ver os objectivos do ensino e aprendizagem da matemática à luz de tal perspectiva.

Estas ideias são apoiadas, nomeadamente, pelas referências feitas por Beatriz, Eloísa e Filipa quanto ao significado de organizar o ensino da matemática na Escola e, em particular, na sala de aula, em torno de resolução de problemas, e às dificuldades que consideram existir nesta tarefa.

Analisando estes significados e dificuldades, poderá dizer-se, seguindo Lampert (14), que ensinar através da pesquisa, aproximar o trabalho que os alunos realizam na sala de aula do desenvolvido por matemáticos e cientistas, e desistir da hipótese de que o que é ensinado coincide com o que é aprendido, pede mais tempo, envolve relações mais exigentes com os alunos e requer do professor uma energia diferente daquela que é necessária para transmitir, simplesmente, o saber disciplinar.

A análise das entrevistas realizadas com os quatro professores deixa, pois, emergir que, no âmbito da educação matemática, embora as *filosofias pessoais* sobre a matemática sustentadas pelos professores desta disciplina, influenciem fortemente as suas *representações pessoais* relativas a *problema* e *resolução de problemas* as relações entre estes dois sistemas de representações parecem apresentar uma natureza sistémica onde estão envolvidos factores matemáticos, não matemáticos, pessoais, institucionais, sociais, cognitivos e afectivos.

Notas

(1) THOMPSON (A.), 1992, "Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research" in Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, D.A. Grouws (Ed.), National Conucil of Teachers of Mathematics, New York, Macmillan Publishing Company, pp.133,134.
(2) Ver ponto 1.1 do segundo capítulo da segunda parte deste estudo.
(3) Este modelo é referido por Lerbet. Ver LERBET (G.), 1990, Le Flou et l' Écolier - La Culture du Paradoxe, U.N.M.F.R.E.O., Éditions Universitaires, p.77.
(4) Esta expressão é aqui utilizada de acordo com a publicação *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Ver NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 1989, Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Reston, Virginia, p.5.
(5) ERNEST (P.), 1992, "Problem Solving: Its Assimilation to the Teacher's Perspective" in Mathematical Problem Solving and New Information Techologies, Research in Contexts of Practice, J.P. Ponte, J.F. Matos, J.M. Matos, D. Fernandes (Eds.), Nato ASI Series, Series F: Computer and Systems Sciences, Vol. 89, Berlin, pp. 292-294. Esta categorização foi apresentada no primeiro capítulo da terceira parte deste estudo.
(6) Estas funções são aqui referidas de acordo com a caracterização indicada por Borralho em 1990 e incluída no primeiro capítulo da segunda parte do presente estudo. Ver ponto 2.1.
(7) Ver ponto 2.2 do primeiro capítulo da segunda parte do presente estudo.
(8) O significado de *resolução de problemas enquanto via educativa* para o ensino e aprendizagem da matemática foi analisado no segundo capítulo da segunda parte deste estudo. Ver, particularmente, o ponto 2.4.
(9) Ver primeiro capítulo da terceira parte deste estudo.
(10) Ibid.
(11) Expressão utilizada por Skemp. Este autor é referido numa revisão da literatura elaborada por Thompson sobre a problemática das concepções dos professores e publicada por esta autora em1992. Ver primeiro capítulo da terceira parte deste estudo.
(12) ERNEST (P.), 1992, op. cit.
(13) O *falibilismo* é aqui entendido de acordo com Ernest, ibid. Enquanto movimento filosófico proposto por Lakatos no âmbito da epistemologia da matemática, o *falibilismo* foi apresentado no segundo capítulo da primeira parte deste estudo.
(14) LAMPERT (M.), 1988, Teachers' Thinking About Students' Thinking About Geometry: The Effects of New Teaching Tools, Technical Report, Educational Technology Center, Harvard Graduate School of Education, Cambridge, pp. 31,32.

Considerações Finais

Considerações Finais

Pretendeu-se, com este estudo, contribuir para a compreensão de como os professores de matemática interpretam a *resolução de problemas* no contexto da matemática escolar, em geral, e no contexto do desenvolvimento dos alunos, em particular.

Estabeleceram-se como objectivos da presente investigação, pesquisar e compreender as *representações pessoais* dos professores relativas a *problema* e *resolução de problemas*, no âmbito da educação matemática, bem como explorar possíveis relações entre estas representações e as suas *filosofias pessoais* sobre matemática.

Foram estes objectivos que orientaram a estrutura e conteúdo do trabalho apresentado.

A primeira parte centrou-se sobre epistemologia da matemática, tendo-se concluído que abordagens filosóficas consideradas indubitáveis e sem alternativas, há algum tempo atrás, têm vindo a ser questionadas propondo-se uma nova forma, mais global, de olhar o saber matemático e os seus processos de produção. Como foi referido na conclusão da primeira parte, esta mudança de direcção faz sobressair, nomeadamente, que a matemática decorre de uma actividade humana, simultaneamente individual e social, de um diálogo entre pessoas que tentam resolver problemas matemáticos.

Tendo-se constatado que a resolução de problemas constitui um elemento indispensável e insubstituível na actividade de produção matemática, na segunda parte do estudo analisou-se a problemática da resolução de problemas quando perspectivada no âmbito da educação matemática.

A análise elaborada evidenciou que na base de muitos dos actuais esforços de reforma curricular aparece, actualmente, a resolução de problemas. Refere-se que deve constituir o *foco da matemática escolar*, a *actividade fundamental*, *um eixo organizador*, *um contexto de aprendizagem*, etc.

Como se procurou salientar, nomeadamente, na conclusão da segunda parte, esta caracterização da educação matemática em termos de resolução de problemas reflecte, simultaneamente, uma reacção e uma tendência. Reacção, a caracterizações passadas que descreviam a matemática escolar como um conjunto de factos e procedimentos algorítmicos a ser dominado de cor. Uma tendência, que vai no sentido de caracterizar os alunos como construtores activos de conhecimento, os problemas como mais diversificados e abertos e a resolução de problemas como um sistema complexo de diversos níveis de actividades, onde a investigação, discussão crítica, formulação de conjecturas e argumentação desempenham um papel de relevo.

A terceira parte do estudo centrou-se na compreensão de perspectivas dos professores de matemática sobre a natureza desta ciência e do seu ensino e aprendizagem, em especial na área da resolução de problemas. Foi aqui que se incluiu a contribuição empírica da presente investigação. É na conclusão da terceira parte que se apresentam, quer algumas observações de carácter geral que se prendem com a análise e realização de entrevistas conduzidas junto de alguns professores, quer as principais conclusões relacionadas com as questões de investigação de que se partiu.

Relativamente a estas conclusões, é de salientar a diversidade de sentidos associados a problema e a resolução de problemas, bem como a natureza complexa das relações entre estes sentidos e as filosofias pessoais sobre matemática sustentadas pelos professores entrevistados.

Após ter percorrido este caminho heurístico, feito de uma reflexão crítica e interrogativa que me ajudou a aprofundar as questões donde parti, julgo poder formular novas linhas de investigação e intervenção que poderão contribuir, quer para o aprofundamento da problemática em estudo, quer, de uma forma mais geral, para ajudar cada aluno, em contextos escolares, a encontrar sentido numa matemática possibilitadora do seu crescimento em autonomia.

Na contribuição empírica do trabalho que desenvolvi, estabeleceram-se conjecturas plausíveis sobre as representações pessoais de professores de matemática relativas a esta ciência e à resolução de problemas quando perspectivada no âmbito da educação matemática. O aprofundamento da plausibilidade destas conjecturas poder-se-á obter, nomeadamente, através da observação das práticas dos professores. Poder-se-á ainda obter pela análise dos constrangimentos e oportunidades proporcionados pelo contexto social de ensino das escolas em que os professores leccionam. Estes constrangimentos e oportunidades parecem influenciar não apenas as práticas que os professores implementam na sala de aula, mas também as próprias teorias de ensino que adoptam e o sentido que lhes atribuem.

Esta ideia é apoiada quer pelo trabalho que desenvolvi, quer quando se considera o processo de construção da Pessoa numa perspectiva sistémica. Olhando o professor enquanto um sistema aberto que se constrói através de dinâmicas, simultaneamente individuais e colectivas, influenciadas por relações institucionais e sociais, parece redutor considerar que as suas representações pessoais sobre resolução de problemas, embora influenciadas pela filosofia pessoal que sustenta relativamente à matemática, sejam consequências directas desta filosofia.

As representações pessoais sobre a matemática não são exclusivamente do foro individual. Parece ser através de relações interactivas entre estas representações e as práticas de ensino, através de experiências vividas e do modo como vão sendo resolvidos conflitos e dilemas existentes nessas experiências, através das interacções que o professor estabelece com os outros e com os múltiplos contextos em que se vai situando, que se vai construindo e modificando o sentido que ele atribui a resolução de problemas e que vai desejando adoptar, ou não, práticas de ensino consistentes com a resolução de problemas perspectivada enquanto via educativa para o ensino e aprendizagem da matemática.

Na área da educação matemática, um grande desafio que hoje se coloca à investigação é, pois, aprofundar a natureza das relações entre filosofias pessoais sobre matemática e representações pessoais relativas à resolução de problemas, e desenvolver uma teoria que abarque a complexidade destas relações. Essa teoria deverá ter em conta que a racionalidade científica do professor se inscreve na globalidade da pessoa que ele é, foi, e projecta vir a ser.

Considerando, globalmente, as entrevistas realizadas com os professores participantes neste estudo, é de destacar que, na generalidade, não foi fácil falar sobre matemática enquanto ciência. Além disso, evidencia-se a restrição, frequente, da matemática à sua dimensão de disciplina escolar e a constatação de que a maioria dos professores entrevistados sustentam filosofias pessoais, que embora não sendo coincidentes, são tendencialmente absolutistas. Diversos investigadores tinham já evidenciado estas tendências. Por vezes, refere-se, ainda, a "cultura matemática reduzida" (1) dos professores ou seja, o pouco conhecimento que têm "acerca da História e Filosofia desta ciência, bem como acerca das suas principais áreas de aplicação" (1).

Neste âmbito, uma grande questão que se coloca é, em primeiro lugar, compreender o porquê desta situação e, em seguida, encontrar processos que possibilitem o enriquecimento de perspectivas filosóficas dos professores sobre a matemática.

A proposta de introduzir ou reforçar Cursos de Filosofia e História da Matemática em programas de formação de professores pode surgir, de imediato, como uma resposta a esta questão. Em particular no sistema educativo educativo português, esta é, certamente, uma via a prosseguir.

Contudo, considerar que muito do que se aprende acerca de matemática está implícito e se encontra intrinsecamente entrelaçado nas situações em que o conhecimento matemático é construído, conduz a questionar se bastará seguir por aí para que se modifique a referida predominância de perspectivas filosóficas absolutistas.

O passado escolar dos professores, enquanto alunos, é a sua maior referência para conceber e organizar as actividades de ensino até que esta referência seja posta, por eles próprios, em causa. Para diversos professores de matemática esse passado escolar foi, frequentemente, feito de experiências de aprendizagem marcadas pela uniformidade e convergência, em que era privilegiada a transmissão, feita pelo professor, de um saber matemático exacto e rigoroso, que devia ser recebido, sem falhas, pelo aluno. Este passado, muitas das vezes, não entra em conflito com as referidas perspectivas filosóficas *absolutistas*. Pode, pois, nem sequer se colocar a questão de saber se a matemática é algo mais do que uma ciência já feita, isenta de ambiguidades e arbitrariedades, rigorosa, exacta e infalível.

Assim, para lá dos cursos de formação de professores integrarem uma componente formativa em filosofia e história da matemática, parece relevante colocar a hipótese de que a própria formação científica inicial, no domínio da matemática, inclua actividades de resolução de problemas, de modelação e de argumentação, de modo a que os professores possam experienciar a matemática enquanto ciência a fazer e enquanto meio facilitador da comunicação de ideias. Explorar a pertinência desta hipótese e pesquisar até que ponto ela poderá contribuir para a transformação de perspectivas filosóficas e atitudes sobre a matemática, e para a melhoria do ensino nas escolas, parece constituir uma linha de investigação a prosseguir.

Outra linha de investigação a explorar emerge quando se considera que, dos quatro professores participantes neste estudo, aquele que sustenta, relativamente à matemática, uma filosofia pessoal não absolutista, mas antes tendencialmente falibilista, é uma professora profissionalizada e cuja formação de base é uma Licenciatura em Matemática Aplicada. Do seu percurso profissional no ensino fizeram parte experiências diversificadas que incluem a formação de professores, a orientação e realização, na Área Escola, de projectos interdisciplinares onde a matemática surge como o núcleo de desenvolvimento, e a concepção e implementação de experiências pedagógicas inovadoras em que a face lógica da matemática se articula com a face extra-lógica.

Esta constatação permite levantar a questão de quais as relações entre o percurso profissional dos professores e as suas filosofias pessoais sobre a matemática. Quais as interacções entre este percurso e as representações pessoais que vão construindo sobre esta ciência e disciplina escolar? De que modo estas representações foram influenciadas e influenciaram este percurso? Quais as experiências que desafiaram representações existentes e contribuíram para as modificar? Como foram vividos e resolvidos conflitos e dilemas entre representações pessoais sobre a natureza da matemática e sobre o ensino da resolução de problemas, e realidades concretas do processo de ensino e aprendizagem quando estas realidades punham em causa aquelas representações? Estas questões remetem para a importância de desenvolver estudos compreensivos e de natureza diacrónica sobre o percurso profissional dos professores de matemática.

Continuando a explorar o porquê da predominância de filosofias pessoais absolutistas entre os professores de matemática, outra linha de investigação surge quando se considera a matemática escolar como resultante de um fenómeno de transposição didáctica (2), em que a matemática pura e a matemática aplicada são adaptadas ao ambiente escolar.

Na Escola, a matemática a ensinar coexiste e interage com muitos outros saberes e variáveis. O próprio contexto educativo em geral e a relação que os professores têm que estabelecer com a matemática quando pretendem ensiná-la, favorecerão a adopção de perspectivas filosóficas fundamentalmente *absolutistas*? Serão estas perspectivas menos conflituais com a segurança e previsibilidade de que alguns professores necessitam para poder tomar decisões relativas à prática de ensino? E assim sendo, como desencadear nos professores práticas de reflexão sobre si próprios, sobre a natureza da matemática e do seu ensino, de modo a que desenvolvam motivações intrínsecas para considerar alternativas?

Este é um grande desafio que se coloca à concepção e implementação de processos de formação de professores, perspectivando a formação, não como o cumprimento sequencial de um programa rigidamente pré-determinado por alguém, mas antes, seguindo Nóvoa (3), como um processo de apropriação individual que se faz numa permanente interacção e confrontação com os outros.

Termino, referindo que os professores são profissionais reflexivos, detentores de consideráveis margens de autonomia pedagógica e institucional. Trabalhar com os alunos em resolução de problemas é precisamente uma das actividades educativas em que muitos se sentem menos confiantes e confortáveis. Os desafios que hoje lhes são colocados na área da educação, em geral, e na da educação matemática, em particular, exigem-lhes, não apenas uma aplicação correcta de materiais e orientações emanadas de outras instâncias, mas sobretudo um trabalho livre e criativo de concepção pedagógica e inovação curricular.

Não basta, pois, que o actual movimento de reforma curricular em matemática alargue o significado da resolução de problemas de modo a considerá-la um contexto de aprendizagem onde os alunos constroem conceitos, descobrem relações, discutem criticamente e formulam conjecturas, para que aconteçam mudanças de *representações pessoais* dos professores sobre a natureza da matemática e do seu ensino e mudanças de práticas pedagógicas.

As mudanças, são processos de aprendizagem colectiva, o que conduz a que não se decretem por programas ou circulares. E na medida em que o acto de ensinar está intimamente ligado à personalidade do professor, só uma possibilidade de evolução baseada na escolha de projectos pessoais, pode transformá-lo substancialmente.

Para concluir, desejo, apenas, reafirmar que considero este trabalho como um momento reflexivo e interrogativo e, espero, desencadeador de outros trabalhos. Não pretendo concluí-lo com o sentido de fechar a porta às questões de investigação de que parti, mas antes de entreabrir outras portas que permitam percorrer novos caminhos de investigação.

Notas

(1) PONTE (J. P.), 1992, Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação, in Educação Matemática, Colecção Temas de Investigação, Instituto de Inovação Educacional, Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, p.209.

(2) Godino, referindo Chevallard, indica que o conceito de transposição didáctica se refere à adaptação do conhecimento matemático de modo a transformá-lo em conhecimento a ser ensinado.
Ver GODINO (J.), (em impressão), Hacia una Teoria de la Didactica de la Matemática, Departamento de la Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, documento policopiado, p.45.

(3) NÓVOA (A.), 1988, "A Formação Tem de Passar por Aqui" in O Método (Auto)biográfico e a Formação, Antologia organizada por A. Nóvoa & M. Finger, Lisboa, Ministério da Saúde, Departamento de Recursos Humanos da Saúde, Centro de Formação e Aperfeiçoamento Profissional, pp.109-130.

Bibliografia

Bibliografia

ABRANTES (P.)

•1988a, "Mudam-se os Tempos, Mudar-se-ão as Vontades?" in Educação e Matemática, Nº 8, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, pp.1,2.

•1988b, "Um (Bom) Problema (Não) é (Só)..." in Educação e Matemática, Nº8, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, pp.7,8,9,10,35.

ABRIC (J.-C.), 1989, "L'Étude Experimental des Représentations Sociales" in Les Représentations Sociales, Sous la Direction de D. Jodelet, Paris, Press Universitaires de France, pp.187-203.

ALARCÃO (I.), TAVARES (J.), 1985, Psicologia do Desenvolvimento e da Aprendizagem, Livraria Almedina, pp.55-81.

ALEXANDER (P.), 1992, "A Cognitive Perspective on Mathematics: Issues of Perception, Instruction and Assessment", in Mathematical Problem Solving and New Information Technologies, Research in Contexts of Practice, J.P. Ponte, J.F. Matos, J.M. Matos, D. Fernandes (Eds.), NATO ASI Series, Series F: Computer and Systems Sciences, Vol. 89, Berlin, pp.61-76.

AMBRÓSIO (T.)

•1987, Aspirations Sociales Projets Politiques et Efficience Socio-Culturelle, Contribution a une Psycho-Sociologie du Fait Politique, Thése pour le Doctorat d' Etat ès-Lettres et Scicences Humaines (Sciences de l'Education), Tours.

•1988, Limites Metodológicos na Investigação dos Processos Auto-Organizativos dos Sistemas Sociais e Humanos, Comunicação no Colóquio de AIPELF, Lisboa, Abril, policopiado, 7p.

ANDLER (D.), 1987, "Problème - Une Clé Universelle?" in D'une Science à l'Autre - Des Concepts Nomades, Sous la Direction d'Isabelle Stengers, Paris, Éditions du Seuil, pp.119-159.

ANDRADE (A. J.),1988, Le Sens des Mathématiques, Contribution à une Compréhension Personnalisée de leur Apprentissage, Mémoire présenté pour l'obtention du Diplôme d'Études Approfondies (Sciences de l'Éducation), Tours, 147p.

ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA (Ed.)

•1990a, Renovação do Currículo de Matemática, 3ª edição, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, 102p.

•1990b, Parecer Relativo aos Projectos de Programas de Matemática do 1º, 2º e 3º Ciclos do Ensino Básico, Lisboa, Associação de professores de Matemática, 22p.

ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA, INSTITUTO DE INOVAÇÃO EDUCACIONAL (Eds.), 1991, Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar, Tradução portuguesa dos *Standards* do National Council of Teachers of Mathematics, Lisboa, Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional, 304p.

BACHELARD (G.), 1986, O Novo Espírito Científico, O Saber da Filosofia, Lisboa, Edições 70, 125p.

BAKER (N.), 1981, "Les Représentations Sociales dans la Relation Maître-élève: Une Lecture de l'Effet des Attentes de l'Enseignant" in Objectivité et Subjectivité dans les Processus Pedagogiques, Université de Geneve, Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation, A.-N. Perret-Clermont (Ed.), pp.39-59.

BALACHEFF (N.) *et al* 1989, "Future Perspectives for Research in the Psychology of Mathematics Education", in Mathematics and Cognition: A Research Syntesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education, P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), ICMI Study Series, Cambridge University Press, pp.135-148.

BALACHEFF (N.), LABORDE (J. M.), 1984, "Introduction a l'Édition Française" in I. LAKATOS, 1984, Preuves et Réfutations. Essai sur la Logique de la Découverte Mathématique, Paris, Hermann, pp.xiii-xx.

BALL (D.), HIGG (J.), OLDKNOW (A.) *et al*, 1991, "A Matemática Contará?" in O Computador na Educação Matemática, Organização de J. P. Ponte, Cadernos de Educação e Matemática, Nº2, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, pp.81-112.

BARATA (M.), AMBRÓSIO (T.), 1988, Desafios e Limites da Modernização, Série Modernização, Instituto de Estudos para o Desenvolvimento, Lisboa, 139p.

BARDIN (L.), 1977, Análise de Conteúdo, Lisboa, Edições 70, 226p.

BARTOLOMEIS (F.), 1984, Introdução à Didáctica da Escola Activa, Lisboa, Livros Horizonte, 322p.

BARUK (S.), 1985, L'Âge du Capinaine, de l'Erreur en Mathématiques, Paris, Éditions du Seuil, 307p.

BATES (F.), MURRAY (V.), 1981, "L'École, Systéme de Comportements" in Sociologie de l'École-Pour une Analyse de l'Établissement Scolaire, textes choisis et presentés par Alain Beaudot, Paris, Dunod, pp.53-67.

BENAVENTE (A.), 1988, "Os Professores e a Mudança da Escola" in Actas do Encontro Nacional Profmat 88, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, pp.9-23.

BIBBY (N.), ABRAHAM (J.), 1989, "Social History of Mathematical Controversies: Some Implications for the Curriculum" in Mathematics, Education and Society, Document Series No.35, Paris, Unesco, pp.56-57.

BORASI (R.)

•1986, "On the Nature of Problems" in Educational Studies in Mathematics, Vol. 17 (2), pp.125-141.

• 1991, "The Invisible Hand Operating in Mathematics Instruction: Students 'Conceptions and Expectations" in Teaching and Learning Mathematics in the 1990s, second printing 1990, Yearbook, T. Cooney & C. Hirsch (Eds.), Reston, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics, pp.174-182.

BORRALHO (A.)

• 1990, Aspectos Metacognitivos na Resolução de Problemas de Matemática: Proposta de um Programa de Intervenção, Tesis para optar al Master en Tecnologia de la Education, Universidad de Salamanca, Madrid - Espanha, 207p.

• 1991, "Funções dos Problemas no Processo Ensino/Aprendizagem da Matemática", in Educação e Matemática, Nº 17, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, pp.13,14.

BOUDON (R.), 1979, La Logique du Social, Paris, Hachette Littérature, 333p.

BOUVIER (A.), 1981, La Mystification Mathématique, Paris, Hermann, 155p.

BROUSSEAU (G.)

•1986, "Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques" in Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7, Nº 2, pp.33-115.

•1989, "Les Obstacles Épistémologiques et la Didactiques des Mathématiques" in Construction des Savoirs Obstacles & Conflits, Sous la Direction de N. Bednarz et C. Garnier, Québec, Cirade, Agence d'ARC inc., pp.41-63.

BROWDER (F.), LANE (S.), 1988, "A Relevância da Matemática" in A Natureza da Matemática, Cadernos de Educação e Matemática, Nº 1, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, pp.17-44.

BURTON (L.), 1989, "Mathematics as a Cultural Experience: Whose Experience?" in Mathematics Education and Society, Document Series No. 35, Paris, Unesco, pp.16-19.

CANÁRIO (R.)

•1978, "A Inovação como Processo Permanente" in Revista de Educação, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa, Vol. 1, Nº 2, Lisboa, pp.17-22.

•1989a, O Determinismo e o Naturalismo como Obstáculo à Inovação Pedagógica, Versão escrita da conferência proferida no colóquio "A História e as Ciências Sociais na formação de professores", realizada na E.S.E.P. de 1 a 4 de Junho de 1989, policopiado, 18p.

•1989b, O Estabelecimento de Ensino no Contexto Local, Conferência proferida na Universidade de Verão "Le Management en Éducation", Universidade de Toulouse, 4-10 Julho 1989, policopiado, 53p.

CARPENTER (T.), 1990, "Teaching as Problem Solving" in The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving, third printing, R. Charles & E. Silver (Eds.), Reston, Virginia, Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics, pp.187-202.

CARRILHO (M.), 1988, "Kuhn e as Revoluções Científicas" in Colóquio/Ciências, Revista de Cultura Científica, Nº2, Lisboa, Fundação Gulbenkian, pp.43-52.

CASTELNUOVO (E.), 1982, "Para um Ensino da Matemática Capaz de Produzir Cultura Científica" in Ensino da Matemática Anos 80, Lisboa, Sociedade Portuguesa de Matemática, pp.29-41.

CHARLES (R.), 1990, "Teacher Education and Mathematical Problem Solving: Some Issues and Directions" in The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving, third printing, R. Charles & E. Silver (Eds.), Reston, Virginia, Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics, pp.259-272.

CHARLES (R.), LESTER (F.Jr.), 1992, "A Framework for Research on Problem-Solving Instruction" in Mathematical Problem Solving and New Information Technologies, Research in Contexts of Practice, J.P. Ponte, J.F. Matos, J.M. Matos, D. Fernandes (Eds.), NATO ASI Series, Series F: Computer and Systems Sciences, Vol. 89, Berlin, pp.1-15.

CHARLESWORTH (M.), 1986, Science, Non-Science & Pseudo-Science, Deakin University Press, pp.1-46.

CHARTIER (D.), 1982, Motivation et Alternance, U.N.M.F.R.E.O., Mesonance, 300p.

COBB (P.), YACKEL (E.), WOOD (T.), 1992, "A Constructivist Alternative to the Representational View of Mind in Mathematics Education" in Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 23, No. 1, pp.2-33.

COBB (P.), WOOD (T.), YACKEL (E.), 1991, "A Constructivist Approach to Second Grade Mathematics" in Radical Constructivism in Mathematics Education, E. Von Glasensfeld (Ed.), Netherlands, Kluwer Academic Publishers, pp.157-176.

COONEY (T.), 1985, "A Beginning Teacher's View of Problem Solving" in Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 16, No. 5, National Council of Teachers of Mathematics, pp.324-336.

COSTA (L.), 1990, "A Resolução de Problemas: Qual o Estado das Coisas?" in Educação e Matemática, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, pp.7,8,32.

COSTA LEITE (M.), NUNES DOS SANTOS (A.M.), ESQUÍVEL (M.) *et al*, 1988, Pensar a Ciência, Lisboa, Gradiva, 169p.

CROZIER (M.), FRIEDBERG (E.), 1977, L'Acteur et le Système, Les Contraintes de l'Action Collective, Paris, Seuil.

CRUZ (N.), 1989, Utilização de Estratégias Metacognitivas no Desenvolvimento da Capacidade de Resolução de Problemas - Um Estudo com Alunos de Física e Química do 10º Ano, Tese de Mestrado em Educação, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 318p.

DAGOGNET (F.), 1986, Bachelard, Lisboa, Edições 70, 102p.

DAVIS (P.)

•1986, "Fidelity in Mathematical Discourse: Is One and One Really Two?" in New Directions in the Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, pp.163-175.

•1989, "Applied Mathematics as Social Contract" in Mathematics, Education and Society, Document Series No.35, Paris, Unesco, pp.24-27.

DAVIS (P.), HERSH (R.)

•1986a, A Experiência Matemática, 3ª edição, Rio de Janeiro, Livraria Francisco Alves Editora S.A., 481p.

•1986b, "The Ideal Mathematician" in New Directions in the Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, pp.177-184.

•1988, "Da Certeza à Falibilidade" in A Natureza da Matemática, Cadernos de Educação e Matemática, Nº 1, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, pp.45-72.

D'AMBROSIO (U.), 1986, Da Realidade à Acção, Reflexões sobre Educação (e) Matemática, São Paulo, Summus Editorial, 115p.

DENIS (M.), 1989, "La Psychologie Cognitive et la Notion de Représentation" in Image et Cognition, Paris, Presses Universitaires de France, pp.15-37.

DIEUDONNÉ (J.), 1990, A Formação da Matemática Contemporânea, Lisboa, Dom Quixote, 286p.

DOMINICÉ (P.), 1989, "Expérience et Apprentissage: Faire de Necessité Vertu" in Éducation Permanente, Nº 100/101, pp.57-65.

DUPONT (C.), 1989, "L' Étude des Représentations, un Enjeu pour les Educateurs" in Les Sciences de L' Éducation, 2, pp.51-68.

DURAND (D.), 1983, La Systémique, 2ᵉ édition, Paris, Presses Universitaires de France, 126p.

ERLWANGER (S. H.), 1973, "Benny's Conception of Rules and Answers in IPI Mathematics" in The Journal of Children Mathematical Behaviour, Vol. I, No. 2, pp.7-26.

ERNEST (P.)

•1989a, "The Impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics" in Mathematics Education and Society, Document Series No. 35, Paris, Unesco, pp.99-101.

•1989b, "The Impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics" in Mathematics Teaching-The State of the Art, P. Ernest (Ed.), Philadelphia, The Falmer Press, pp.249-254.

•1991, The Philosophy of Mathematics Education, Hampshire, The Falmer Press, 329p.

•1992, "Problem Solving: Its Assimilation to the Teacher's Perspective" in Mathematical Problem Solving and New Information Technologies, Research in Contexts of Practice, J.P. Ponte, J.F. Matos, J.M. Matos, D. Fernandes (Eds.), NATO ASI Series, Series F: Computer and Systems Sciences, Vol. 89, Berlin, pp.287-300.

FERNANDES (D.)

•1988, "Aspectos Metacognitivos na Resolução de Problemas de Matemática" in Educação e Matemática, Nº 8, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, pp.3-6.

• 1991, "Insucesso em Matemática: E não Podemos nós, os Professores, Exterminá-lo?" in Noesis, Nº 21, Lisboa, Instituto de Inovação Educacional, pp.28-30.

•1992, "Resolução de Problemas: Investigação, Ensino, Avaliação e Formação de Professores" in Educação Matemática, Colecção Temas de Investigação, Instituto de Inovação Educacional, Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, pp.45-103.

FISCHBEIN (E.), 1889, "Introduction" in Mathematics and Cognition: A Research Syntesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education, P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), ICMI Study Series, Cambridge University Press, pp.1-13.

FLAMENT (C.), 1989, "Structure et Dynamique des Représentations Sociales" in Les Représentations Sociales, Sous la Direction de D. Jodelet, Paris, Press Universitaires de France, pp.204-219.

FORMOSINHO (J.), 1989, "Para uma Pedagogia do Desenvolvimento" in Inovação, Vol. 2, Nº 4, Instituto de Inovação Educacional, pp.467-475.

FRANCO (A.M.) e TEIXEIRA (A.P.), 1987, Atitude dos Professores Face à Resolução de Problemas, Lisboa, Associação de Professores de Matemática.

FRANK (M.), 1988, "Problem Solving and Mathematical Beliefs" in Aritmetic Teacher, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, pp.32-34.

GARDNER (M.), 1990, Ah, Descobri, Gradiva, Lisboa.

GHIGLIONE (R.), MATALON (B.), 1978, Les Enquêtes Sociologiques, Theories et Pratique, Paris, Armand Colin, 301p.

GIERE (R.), 1989, "A Natureza da Ciência - Uma Perspectiva Iluminista Pós-Moderna" in Colóquio/Ciências, Revista de Cultura Cientifica, Nº 6, Lisboa, Fundação Gulbenkian, pp.72-84.

GIL (F.), 1979, "História das Ciências e Epistemologia: Apresentação do Debate Popper-Kuhn" in História e Prática das Ciências, Lisboa, Biblioteca de Filosofia 2, A Regra do Jogo, pp.165-182.

GILLY (M.), 1989, "Les Représentations Sociales sans le Champ Éducatif" in Les Représentations Sociales, Sous la Direction de D. Jodelet, Paris, Press Universitaires de France, pp.363-385.

GODINO (J.), (em impressão), Hacia una Teoria de la Didactica de la Matemática, Departamento de la Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, documento policopiado, 62p.

GOETZ (J.), LECOMPTE (M.), 1984, Etnography and Qualitive Design in Educational Research, London, Academic Press Inc, Harcourt Brace Jovanovich, Publishers.

GOLDMAN (A.), 1986, "Problem Solving, Power and Speed" in Epistemology and Cognition, Cambridge, Massachusets and London, Harvard University Press, pp.122-141.

GOODMAN (N.), 1986, "Mathematics as an Objective Science" in New Directions in the Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, pp.79-94.

GRABINER (J.), 1986, "Is Mathematical Truth Time-Dependent?" in New Directions in the Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, pp.201-213.

GREENO (J.), 1990, "For the Study of Mathematics Epistemology" in The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving, third printing, R. Charles & E. Silver (Eds.), Reston, Virginia, Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics, pp.23-31.

GROUWS (D.), 1985, "The Teacher and Classroom Instruction: Neglected Themes in Problem-Solving Research" in Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives, E. Silver (Ed.), Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, pp.295-308.

GRUGNETTI (L.), 1989, "A Importância do Problema" in Educação e Matemática, Nº10, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, pp.3-6; p.35.

GUILLEN (M.), 1987, Pontes para o Infinito - O Lado Humano das Matemáticas, Lisboa, Gradiva, 204p.

GUIMARÃES (H.)

•1987, "Um Ciclo Vicioso" in Educação e Matemática Nº 2, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, pp.9-10.

•1988, Ensinar Matemática: Concepções e Práticas, Tese Apresentada para Obtenção do Grau de Mestre em Educação, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 290p.

•1989, "Por uma Visão não Instrumentalista da Matemática" in Educação e Matemática, Nº 12, Lisboa, A.P.M., pp.11,12,40.

• 1990, "Ensino da Matemática nos Anos 90 - Uma Leitura dos Standards", in Profmat 90 - Actas, Vol. 1, Organizado por P. Abrantes & A. Silva, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, pp.11-26.

• 1992, "Concepções, Práticas e Formação de Professores" in Educação Matemática, Colecção Temas de Investigação, Instituto de Inovação Educacional, Secção de

Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, pp.249-255.

HENDERSON (A.), "From the Teacher's Side of the Desk" in Cognitive Science and Mathematics Education, A. Schoenfeld (Ed.), Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, pp.149-164.

HERSH (R.), 1986, "Some Proposals for Reviving The Philosophy of Mathematics" in New Directions in the Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, pp.9-28.

HUBERMAN (M.), 1989, "Synthese et Conclusions" in La Vie des Enseignants - Évolution et Bilan d'une Profession, Neuchâtel, Delachaux & Niestlé, pp.309-328.

HÚSEN (T.), 1989, "Integração da Formação Geral e Formação Profissional - Uma Perspectiva Internacional" in Formação Profissional 1, pp.10-14.

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO EDUCACIONAL (Org.), 1991, "A Educação Matemática, Mesa Redonda" in Noesis, Nº. 21, pp.20-27.

JANVIER (C.), 1987, "Conceptions and Representations: The Circle as an Example" in Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics, C. Janvier (Ed.), Hillsdale, London, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, pp.147-158.

JONES (D.), 1988, A Review of Selected Research Related to the Revelance of Mathematics Teachers' Beliefs to Teacher Education and Instructional Practice, University of Georgia, February, Draft, policopiado, 33p.

KANTOWSKI (M.G.), 1977, "Processes Involved in Mathematical Problem Solving" in Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 8, No. 3, National Council of Teachers of Mathematics, pp.163-180.

KERLAN (A.), 1987, "La Notion de Représentation: Une Exigence Pédagogique et Culturelle" in Éducation Permanente, Nº 90, pp.69-80.

KILPATRICK (J.)

•1985, "A Retrospective Account of The Past 25 Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving" in Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives, Silver (Ed.), Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, pp.1-15.

•1987, "What Constructivism Might Be in Mathematics Education" in Psychology of Mathematics Education, PME-XI, Vol. I, J. Bergeron, N. Herscovics, C. Kieran (Eds.), Montreal, pp.3-27.

KLINE (M.)

• 1976, O Fracasso da Matemática Moderna, São Paulo, Ibrasa, 211p.

• 1989, Mathématiques: La Fin de la Certitude, Christian Bourgois Éditeur, 664p.

KUHN (T.)

•1970, The Structure of Scientific Revolutions, second edition, Chicago, The University of Chicago Press, 210p.

•1989, A Tensão Essencial, Lisboa, Edições 70, 420p.

LAKATOS (I.)

•1984, Preuves et Réfutations. Essai sur la Logique de la Découverte Mathématique, Paris, Hermann, 218p.

•1986, "A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics?" in New Direction in the Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, pp.29-48.

LAKATOS (I.), MUSGRAVE (A.), (Eds.), 1970, Criticism and the Growth of Knowledge, Vol. 4, Cambridge University Press.

LAMPERT (M.), 1988, Teachers' Thinking About Students' Thinking About Geometry: The Effects of New Teaching Tools, Technical Report, Educational Technology Center, Harvard Graduate School of Education, Cambridge, policopiado, 34p.

LAUWE (P.H.C.), 1971, Pour une Sociologie des Aspirations, Paris, Denoel, 211p.

LAUWE (M.-J.C.), FEUERHAHN (N.), 1989, "La Représentation Sociale dans le Domaine de l'Enfance" in Les Représentations Sociales, Sous la Direction de D. Jodelet, Paris, Press Universitaires de France, pp.320-339.

LAVE (J.), SMITH (S.), BUTLER (M.), 1990, "Problem Solving as an Everyday Practice" in The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving, R. Charles & E. Silver (Eds.), Reston, Virginia, Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics, pp.61-81.

LEDER (G.), 1989, "The Image of Mathematics in Society: A Case Study" in Mathematics Education and Society, Document Series No. 35, Paris, Unesco, pp.40-42.

LEGROUX (J.), 1981, De l'Information à la Connaissance, U.N.M.F.R.E.O., Maurecourt, Mesonance, 379p.

LERBET (G.)

•1981, Une Nouvelle Voie Personnaliste: Le Systéme-Personne, U.N.M.F.R.E.O., Éditions Universitaires, Maurecourt, 178p.

•1984, Approche Systèmique et Production de Savoir, U.N.M.F.R.E.O., Éditions Universitaires, 273p.

•1986, De la Structure au Systéme. Essai sur l'Evolution des Sciences Humaines, U.N.M.F.R.E.O., Éditions Universitaires, 165p.

•1990, Le Flou et l'Écolier-la Culture du Paradoxe, U.N.M.F.R.E.O., Éditions Universitaires, 173p.

LERMAN (S.)

•1983, "Problem-solving or Knowledge-centred: The Influence of Philosophy on Mathematics Teaching" in International Journal of Mathematics Education in Science and Techonology, Vol. 14, No. 1, pp.59-66.

•1989a, "A Social View of Mathematics - Implications for Mathematics Education" in Mathematics, Education and Society, Document Series No. 35, Paris, Unesco, pp.42-44.

•1989b, "Investigations: Where to Now?" in Mathematics Teaching-The State of the Art, P. Ernest (Ed.), Philadelphia, The Falmer Press, pp.73-80.

LESTER (F.Jr.)

•1980, "Research on Mathematical Problem Solving" in Research in Mathematics Education, R.J. Shumway (Ed.), Reston, National Council of Teachers of Mathematics, pp.286-323.

•1983, "Trends and Issues in Mathematical Problem-Solving Research" in Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, R. Lesh & M. Landau (Ed.), Academic Press Inc., Harcourt Brace Jovanovich Publishers, pp.229-261.

•1990, "Reflections about Mathematical Problem-Solving Research" in The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving, R. Charles & E. Silver (Eds.), Reston, Virginia, Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics, pp.115-124.

LESTER (F. Jr.), GAROFALO (J.), 1987, The Influence of Affects, Beliefs and Metacognition on Problem Solving Behavior: Some Tentative Speculations, Paper Presented at the Annual Meeting of American Educational Research Association, Washington DC, 20-24 April, 22p.

MATOS (J.F.)

•1991, Logo na Educação Matemática: Um Estudo Sobre as Concepções e Atitudes dos Alunos, Tese de Doutoramento, Lisboa, Projecto MINERVA, Pólo do DEFCUL, Universidade de Lisboa, 657p.

•1992, "Atitudes e Concepções dos Alunos: Definições e Problemas de Investigação" in Educação Matemática, Colecção Temas de Investigação, Instituto de Inovação Educacional, Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, pp.123-171.

MATOS (J.F.), PONTE (J.P.), TEIXEIRA (M.P.), ABRANTES (P.) (Eq. Resp.), 1981, Inflexão, Nº 2, Folha Informativa do Grupo para a Renovação do Ensino da Matemática da Sociedade Portuguesa de Matemática, Lisboa, S.P.M., 48p.

MEIRIEU (P.), 1990, Apprendre... Oui, Mais Comment, 5ᵉ édition, Paris, ESF éditeur, 192p.

MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO

•1990, Programa do 1º Ciclo, Reforma Educativa, Algueirão, Editorial do Ministério da Educação.

•1991a, Organização Curricular e Programas, Vol. I, Ensino Básico, 2º Ciclo, Reforma Educativa, Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário, Lisboa, Imprensa Nacional- Casa da Moeda, E.P.

•1991b, Organização Curricular e Programas, Vol. I, Ensino Básico, 3º Ciclo, Reforma Educativa, Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário, Lisboa, Imprensa Nacional- Casa da Moeda, E.P.

•1991c, Programa de Matemática- Plano de Organização do Ensino- Aprendizagem, Vol. II, Ensino Básico, 2º Ciclo, Reforma Educativa, Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário, Lisboa, Imprensa Nacional- Casa da Moeda, E.P.

•1991d, Programa de Matemática- Plano de Organização do Ensino- Aprendizagem, Vol. II, Ensino Básico, 3º Ciclo, Reforma Educativa, Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário, Lisboa, Imprensa Nacional- Casa da Moeda, E.P.

MIZUKAMI (M.G.), 1986, Ensino: As Abordagens do Processo, São Paulo, E.P.U., 119p.

MOREIRA (M. L.)

•1987, "A Resolução de Problemas" in Educação e Matemática, Nº 1, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, pp.10-12.

•1989, A Folha de Cálculo na Educação Matemática - Uma Experiência com Alunos do Ensino Preparatório, Tese de Mestrado em Educação, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 224p.

MORIN (E.)

•1982, Ciência com Consciência, Lisboa, Publicações Europa América, 255p.

•1984, "A Inteligência da Mudança" in Sociologia, Lisboa, Publicações Europa-América, pp.333-362.

MOSCOVICI (S.)

•1989a, "À Propos des Notions d'Obstacle Épistémologique et Conflit Socio-cognitif" in Construction des Savoirs, Obstacles & Conflits, Sous la Direction de N. Bednarz et C. Garnier, Quebec, Cirade, Agence d'ARC inc., pp.390-398.

•1989b, "Des Représentations Collectives aux Représentations Sociales: Éléments pour une Histoire" in Les Représentations Sociales, Sous la Direction de D. Jodelet, Paris, Press Universitaires de France, p.62-86.

MOSES (B.), BJORK (E.), GOLDENBERG (E.P.), 1991, "Beyond Problem Solving: Problem Posing" in Teaching and Learning Mathematics in the 1990s, 1990 Yearbook, T. Cooney & C. Hirsch (Eds.), Reston, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics, pp.82-91.

MOURÃO (A. P.), 1990, "Algumas Reflexões sobre a Importância da Resolução de Problemas no Ensino-Aprendizagem da Matemática" in PROFMAT 89 - Actas, Organizado por E. Veloso e H. Guimarães, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, pp.345-356.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 1989, Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Reston, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics, 258p.

NIMIER (J.)

•1976, Mathématique et Affectivité, Paris, Ed. Stock, 244p.

•1988, Les Modes de Relations aux Mathématiques, Paris, Méridiens Klincksieck, 304p.

NISBET (J.), DAVIS (P.), 1990, "The Curriculum Redefined: Learning to Think-Thinking to Learn" in Research Papers in Education, Vol. 5, No. 1, pp.49-72.

NODDINGS (N.), 1990, "Preparing Teachers to Teach Mathematical Problem Solving" in The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving, third printing, R. Charles & E. Silver (Eds.), Reston, Virginia, Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics, pp.244-258.

NÓVOA (A.), 1988, "Inovação para o Sucesso Educativo Escolar" in Aprender, Revista da Escola Superior de Educação de Portalegre, Nº 6, pp.5-9.

NÓVOA (A.), FINGER (M.), (Org.) 1988, O Método (Auto)biográfico e a Formação, Antologia organizada por A. Nóvoa & M. Finger, Lisboa, Ministério da Saúde, Departamento de Recursos Humanos da Saúde, Centro de Formação e Aperfeiçoamento Profissional, 157p.

OLIVEIRA (A.F.), 1991, Lógica e Aritmética, Lisboa, Gradiva, 204p.

OROFIAMMA (R.), 1990, "Les Competences de 3ᵉ Dimension, Nouvelle Intelligence des Situations Professionneles?" in Les Competences de 3ᵉ Dimension, Ouverture Professionnelle?, Conservatoire National des Arts et Metiers, Centre de formation de formateurs.

ORTON (R.), 1988, "Two Theories of "Theory" in Mathematics Education: Using Kuhn and Lakatos to Examine Four Foundational Issues" in For The Learning of Mathematics 8, 2, Montreal, F. L. M. Publishing Association, pp.36-43.

OSBORNE (R.J.), GILBERT (J.K.), 1980, "A Method for Investigating Concept Understanding in Science" in European Journal of Science Education, Vol. 2, No. 3, K. Frey, R. Kempa, G. Delacôte *et al* (Eds.), London, Taylor & Francis Ltd., pp.311-321.

PAPERT (S.)

•1981a, "Mathophbie: L'Horreur d'Apprendre" in Jaillissement de l' Esprit-Ordinateurs et Apprentissage, Flammarion, pp.53-73.

•1981b, "L' Inconscient Mathématique" in Jaillissement de l'Esprit, Ordinateurs et Apprentissage, Flammarion, pp.237-257.

•1991, "Ensinar Crianças a Serem Matemáticos versus Ensinar Matemática" in O Computador na Educação Matemática, Organização de J. P. Ponte, Cadernos de Educação Matemática, Nº 2, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, pp.29-44.

PATTON (M.), 1980, "Qualitative Interviewing" in Qualitative Evaluation and Research Methods, London, Sage, pp.195-263.

PERKINSON (H.), 1980, "Educative Environments" in Et Cetera - Summer 80, pp.132-142.

PERRET-CLERMONT (A. N.), SCHUBAUER-LEONI (M. L.), 1989, "The Social Construction of Meaning in Math Class Interactions" in Mathematics, Education and Society, Document Series No. 35, Paris, Unesco, pp.121,122.

PIAGET (J.)

•1972, The Principles of Genetic Epistemology, London, Routledge & Kegan Paul.

•1980, "Os Problemas Principais da Epistemologia das Matemáticas" in Lógica e Conhecimento Cientifico, Porto, Livraria Civilização - Editora, pp.457-489.

PIAGET (J.), GARCIA (R.), 1987, Psicogénese e História das Ciências, Lisboa, Dom Quixote, 251p.

PINEAU (G.), 1986, Temps et Contretemps em Formation Permanente, U.N.M.F.R.E.O., Editions Universitaires.

POINCARÉ (H.), 1988, "Intuição e Lógica em Matemática" in A Natureza da Matemática, Cadernos de Educação e Matemática, Nº 1, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, pp.7-16.

PÓLYA (G.)

•1965, Comment Poser et Résoudre un Problème, deuxième edition, Paris, Dunod, 237p.

•1986, "From the Preface of *Induction and Analogy in Mathematics*" in New Directions in the Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, pp.99-101.

PONTE (J.P.)

• 1984, "Resolução de Problemas em Matemática" in Evoluta, Nº2.

•1988, "Matemática, Insucesso e Mudança: Problema Possível, Impossível ou Indeterminado?" in Aprender, Revista da Escola Superior de Educação de Portalegre, Nº 6, Novembro, pp.10-19.

1992, Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação, in Educação Matemática, Colecção Temas de Investigação, Instituto de Inovação Educacional, Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação, pp.185-239.

PONTE (J.P.), ABRANTES (P.), 1982, "Os Problemas no Ensino da Matemática" in Ensino da Matemática Anos 80, Lisboa, Sociedade Portuguesa da Matemática, pp.201-213.

PONTE (J.P.), MATOS (J.F.), 1992, "Cognitive Processes and Social Interactions in Mathematical Investigations" in Mathematical Problem Solving and New Information Technologies, Research in Contexts of Practice, J.P. Ponte, J.F. Matos, J.M. Matos, D. Fernandes (Eds.) NATO ASI Series, Series F: Computer and Systems Sciences, Vol. 89, Berlin, pp.239-254.

POPPER (K.)

•1974, (1ª edição), A Lógica da Pesquisa Científica, Edição 4-5-6-7-8-9, Ano 89-90-91-92-93, São Paulo, Editora Cultrix Lda, 567p.

•1987, Sociedade Aberta, Universo Aberto, Lisboa, Dom Quixote, 112p.

•1988, "O Indeterminismo não Basta: Um Posfacio" in Universo Aberto Pós-escrito à Lógica da Descoberta Cientifica, Lisboa, Dom Quixote, pp.115-129.

•1989, Em Busca de um Mundo Melhor, Lisboa, Fragmentos, 235p.

POPPER (K.), LORENZ (K.), 1990, O Futuro Está Aberto, Lisboa, Fragmentos, 118p.

POSTIC (M.), 1984, A Relação Pedagógica, Coimbra, Coimbra Editora Limitada, 295p.

PUTNAM (H.), 1986, "What Is Mathematical Truth?" in New Directions in the Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, pp.49-65.

PUTNAM (R.), LAMPERT (M.), PETERSON (P.), 1990, "Alternative Perspectives on Knowing Mathematics in Elementary Schools" in Review of Research in Education, 16, C. Cazden (Ed.), Harvard University Graduate School of Education, Washington, American Education Research Association, pp.57-150.

RAYMOND (A.), SANTOS (V.), MASINGILA (J.), 1991, The Influence of Innovative Instructional Processes on Mathematical Beliefs Systems, Comunicação apresentada em Abril de 1991 no Annual Meeting of the American Educational Research Association, policopiado, 23p.

RESNICK (L.), 1990, "Treating Mathematics as an Ill-Structured Discipline" in The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving, third printing, R. Charles & E. Silver (Eds.), Reston, Virginia, Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics, pp.32-60.

REVUZ (A.), 1980, Est-il Impossible d'Enseigner les Mathématiques?, Paris, Presses Universitaires de France, 153p.

RIVERIN-SIMARD (D.), 1989, "Les Cycles de Vie" in Histoires de Vie, Paris, Éditons l' Harmattan, tomo 2, pp.181-197.

ROGERS (C.), 1985, Tornar-se Pessoa, 7ª edição, Lisboa, Moraes Editores, 342p.

ROSNAY (J.)

•1977, O Macroscópio, Lisboa, Editora Arcádia, 270p.

•1981, "L'Approche Systémique Appliquée à l'Établissement Scolaire" in Sociologie de l'École-Pour une Analyse de l'Etablissement Scolaire, textes choisis et presentés par Alain Beaudot, Paris, Dunod, pp.141-154.

RUDDUCK (J.), 1988, "The Ownership of Change as a Basis for Teachers' Professional Learning" in Teachers Professional Learning, Lewes, The Falmer Press, pp.205-215.

RUIVO (J.), 1990, O Que é um Bom Professor, Representação das Caracteristicas de Professores, Segundo Professores em Formação- Um Estudo de Caso, Dissertação Apresentada para Conclusão do Mestrado em Ciências da Educação, Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação da Universidade Nova de Lisboa, 229p.

SANCHEZ (S.), 1989, "The Necessity of Popularizing Mathematics via Radio Programs" in Mathematics, Education and Society, Document Series No.35, Paris, Unesco, pp.61,62.

SANTOS (B.), 1989, Introdução a uma Ciência Pós Moderna, Porto, Edições Afrontamento, 199p.

SANTOS (M. E.), 1991, Mudança Conceptual na Sala de Aula - Um Desafio Pedagógico, Lisboa, Livros Horizonte, 261p.

SCHOENFELD (A.)

•1985, "Heuristics" in Mathematical Problem Solving, London, Academic Press inc, pp.69-97.

•1987a, "Cognitive Science and Mathematics Education: An Overview" in Cognitive Science and Mathematics Education, A. Schoenfeld (Ed.), Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, pp.1-31.

•1987b, "What's All the Fuss About Metacognition?" in Cognitive Science and Mathematics Education, A. Schoenfeld (Ed.), Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, pp.189-215.

•1989, "Teaching Mathematical Thinking and Problem Solving" in Toward the Thinking Curriculum: Current Cognitive Research, Yearbook of the Association for Supervision and Curriculum Development, L. Resnick & L. Klopfer (Eds.). ASCD, pp.83-103.

•1990, "Problem Solving in Context(s) in The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving, third printing R. Charles & E. Silver (Eds.), Reston, Virginia, Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics, pp.82-92.

SCHUBAUER-LEONI (M.L.), 1989, "Problématisation des Notions d'Obstacle Épistémologique et Conflit Socio-Cognitif dans le Champ Pédagogique" in Construction des Savoirs, Obstacles & Conflits, Sous la Direction de N. Bednarz et C. Garnier, Québec, Cirade, Agence d'ARC inc., pp.350-363.

SCHUBRING (G.), 1989, "Theoretical Categories for Investigations in the Social History of Mathematics Education and some Characteristic Patterns" in Mathematics, Education and Society, Document Series No. 35, Paris, Unesco, pp.6-8.

SEKIGUCHI (Y.), 1991, An Investigation on Proofs and Refutations in the Mathematics Classroom, A Dissertation Submitted to the Graduate Faculty of the University of Georgia in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree Doctor of Education, Athens, Georgia, 282p.

SILVA (J. S.)

•1964a, Compêndio de Matemática, 1º volume, 6º ano, Texto piloto editado pelo Ministério da Educação com a cooperação da O.C.D.E. segundo o Projecto Especial STP-4/SP/Portugal.

•1964b, Guia para a Utilização do Compêndio de Matemática, 1º volume, 6º ano, Texto piloto editado pelo Ministério da Educação com a cooperação da O.C.D.E. segundo o Projecto Especial STP-4/SP/Portugal.

•1965-66a, Compêndio de Matemática, 2º volume, 7º ano, Texto piloto editado pelo Ministério da Educação com a cooperação da O.C.D.E. segundo o Projecto Especial STP-4/SP/Portugal.

•1965-66b, Compêndio de Matemática, 3º volume, 7º ano, Texto piloto editado pelo Ministério da Educação com a cooperação da O.C.D.E. segundo o Projecto Especial STP-4/SP/Portugal.

•1965-66c, Guia para a Utilização do Compêndio de Matemática Volumes II e III - 7º ano, Texto piloto editado pelo Ministério da Educação com a cooperação da O.C.D.E. segundo o Projecto Especial STP-4/SP/Portugl.

• 1967, Aditamento ao 2º Volume do Texto-Piloto, Texto piloto editado pelo Ministério da Educação com a cooperação da O.C.D.E. segundo o Projecto Especial STP-4/SP/Portugal.

SILVA (A.S.), PINTO (J.M.) (Orgs.), 1989, Metodologia das Ciências Sociais, Porto, Edições Afrontamento, 317p.

SILVER (E.)

•1985, "Research on Teaching Mathematical Problem Solving: Some Underrepresented Themes and Needed Direction" in Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives, E. Silver (Ed.), Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, pp.247-266.

•1990, "Teaching and Assessing Mathematical Problem Solving: Toward a Research Agenda" in The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving, third printing, R. Charles & E. Silver (Eds.), Reston, Virginia, Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics, pp.273-282.

SNAPPER (E.), 1979, "The Three Crises in Mathematics: Logicism, Intuitionism and Formalism" in Mathematics Magazine, Vol. 52, No. 4, Septembre 1979, pp.207-216.

ST. AUBYN (A.)

• 1981, "Matemática Moderna em Crise?" in Inflexão, Nº 2, Folha Informativa do Grupo para a Renovação do Ensino da Matemática da Sociedade Portuguesa de Matemática, Lisboa, S.P.M., pp.6-12.

• 1982, "Análise da Preparação Matemática dos Estudantes ao Entrarem para as Escolas Superiores" in Ensino da Matemática Anos 80, Lisboa, Sociedade Portuguesa de Matemática, pp.121-130.

STANIC (G.), KILPATRICK (J.), 1990, "Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum" in The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving, third printing, R. Charles & E. Silver (Eds.), Reston, Virginia, Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics, pp.1-22.

STRUIK (D.), 1989, História Concisa das Matemáticas, Lisboa, Gradiva, 360p.

TAVARES (J.), ALARCÃO (I.), 1985, Psicologia do Desenvovimento e da Aprendizagem, Livraria Almedina, pp.55-81.

THOM (R.), 1986, "Modern" Mathematics: An Educational and Philosophic Error?" in New Direction in the Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, pp.67-78.

THOMPSON (A.)

•1985, "Teachers' Conceptions of Mathematics and the Teaching of Problem Solving" in Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives, E. Silver (Ed.), Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, pp.281-294.

•1990, "Learning to Teach Mathematical Problem Solving: Changes in Teachers' Conceptions and Beliefs" in The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving, third printing, R. Charles & E. Silver (Eds.), Reston, Virginia, Lawrence Erlbaum Associates, National Council of Teachers of Mathematics, pp.232-243.

•1992, "Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research" in Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, D.A. Grouws (Ed.), A Project of The National Council of Teacher of Mathematics, New York, Macmillan Publishing Compay, pp.127-146.

THOMPSON (P.), 1985, "Experience, Problem Solving, and Learning Mathematics: Considerations in Developing Mathematics Curricula" in Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives, E. Silver (Ed.), Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, pp.189-236.

THOMPSON (V.), 1989, "Family Math: Linking Home and Mathematics" in Mathematics Education and Society, Document Series No. 35, Paris, Unesco, pp.62-65.

TYMOCZKO (T.)

•1986a, "Introduction" in New Directions in the Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, pp.xiii-xvii.

•1986b "Challenging Foundations" in New Directions in the Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, pp.1-8.

•1986c "Interlude" in New Directions in the Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, pp.95-98.

•1986d, "Mathematical Practice" in New Directions in the Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, pp.125-128.

•1986e, "The Four-Color Problem and its Philosophical Significance" in New Directions in the Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Birkhäuser, Boston, pp.243-266.

UPINSKY (A.-A.), 1985, La Perversion Mathématique, L'Oeil du Pouvoir, Mónaco, Editions du Rocher, 316p.

VALENTE (M.O.), GASPAR (A.), LOBO (A.) *et al*, 1987, Aprender a Pensar, Lisboa, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 198p.

VALENTE (M.O.), NETO (A.), VALENTE (M.), 1989, "Resolução de Problemas em Física: Necessidade de uma Ruptura com a Didáctica Tradicional" in Gazeta da Física, Vol. 12, Fasc. 2, Lisboa, Sociedade Portuguesa de Física, pp.70-78.

VERGNAUD (G.) *et al*, 1989, "Epistemology and Psychology of Mathematics Education" in Mathematics and Cognition: A Research Syntesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education, P. Nesher and J. Kilpatrick (Eds.), ICMI Study Series, Cambridge University Press, pp.14-30.

VOLMINK (J.), 1989, "Non-School Alternatives in Mathematics Education" in Mathematics, Education and Society, Document Series No. 35, Paris, Unesco, pp.59-61.

VYGOTSKY (L.S.), 1989, Pensamento e Linguagem, 2ª edição, São Paulo, Livraria Martins Fontes Editora Lda., 135p.

WANG (H.), 1986, "Theory and Practice in Mathematics" in New Directions in The Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, pp.129-152.

WILDER (R.), 1986, "The Cultural Basis of Mathematics" in New Directions in The Philosophy of Mathematics, An Anthology Edited by Thomas Tymoczko, Boston, Birkhäuser, pp.185-199.

WOLF (M.), 1984, La Bosse des Maths Est-elle une Maladie Mentale?, Paris, Edition la Decouverte, 165p.

YACKEL (E.), COBB (P.), WOOD (T.) *et al*, 1991, "A Importância da Interacção Social na Construção do Conhecimento Matemático das Crianças" in Educação e Matemática, Nº 18, Lisboa, Associação de Professores de Matemática, pp.17-21.

YOUNG (R. E.), ARNOLD (R.), WATSON (K.), 1987, "Linguistic Models" in The International Encyclopedia of Teaching and Theacher Education, M. J. Dunkin (Ed.), Oxford, Pergamon Press, pp.49-58.

Anexo 1

Instrumentos de recolha de dados

1.1 - Guiões dos dois momentos de entrevistas

1.1.1 - Primeiro momento: Primeira entrevista

✎ Houve com certeza no passado razões que o levaram a ser professor de matemática. Gostaria que me falasse sobre três dessas razões.

✎ Na forma como viveu a aprendizagem da matemática enquanto aluno, houve talvez experiências que influenciaram o professor que hoje é. Fale-me sobre três das que considera mais significativas.

✎ Um colega seu disse-me há dias que *fazer matemática*, *ensino da matemática* e *educação matemática* são expressões com o mesmo significado. O que pensa sobre o assunto?

✎ Dê-me um exemplo concreto de um problema de matemática. (Solicitar as razões da opção).

✎ Ao longo da sua carreira encontrou talvez algum aluno que considerou ter muito jeito para a matemática. Fale-me sobre esse aluno.

✎ Há quem diga que faz parte da natureza da matemática o facto desta ciência não poder ser compreendida por todos. No campo educativo a *matemática é só para alguns* é uma expressão que faz parte da gíria escolar de muitos alunos. O que pensa a este propósito?

✎ Imagine que era professor numa escola secundária e que tinha uma turma do 7º ano unificado com quem pretendia trabalhar resolução de problemas. Descreva-me como decorreria uma das suas aulas com essa turma.

✎ Em tempos li que o trabalho de um matemático e o trabalho de um aluno na sala de aula, apesar de serem diferentes na sua complexidade, não o são na sua natureza. O que pensa desta ideia?

✎ Se tivesse que explicar a alguém o que é a matemática, que aspectos gostaria de salientar? Que palavras usaria para a descrever?

✎ Se um professor, que fosse dar aulas de matemática pela primeira vez, lhe pedisse algumas orientações sobre a organização das situações de aprendizagem, o que lhe recomendaria?

1.1.2 - Segundo momento: Segunda entrevista

✎ Li algures que a matemática é uma ciência neutra, objectiva e independente de valores culturais. O que pensa desta ideia?

✎ A Lei de Bases do Sistema Educativo refere que importa contribuir para "o desenvolvimento pleno e harmonioso da personalidade dos indivíduos, incentivando a formação de cidadãos livres, responsáveis, autónomos e solidários (...) capazes de julgarem com espírito crítico e criativo o meio social em que se integram".

Enquanto professor de matemática como pensa responder a este desafio?

✎ No início de um ano lectivo um colega seu, também professor de matemática, comunicou-lhe que nesse ano optara por organizar o seu trabalho com as turmas em torno de resolução de problemas e pediu-lhe em seguida a sua opinião sobre esta opção. Fale-me sobre o que pensou acerca deste assunto após a conversa com o seu colega.

✎ Há quem defenda que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas deve ser um eixo organizador do ensino da matemática. No entanto, há também quem não adira completamente a esta ideia argumentando com factores de natureza variada. Gostaria que me falasse sobre o que pensa acerca de tal orientação.

❑ **Propor ao entrevistado a tarefa I**

Tarefa I

Apresentar as *propostas de trabalho* indicadas no anexo A dizendo que foram recolhidas de artigos e livros de texto, como sendo potenciais situações a trabalhar em contextos escolares.

Pedir ao professor para falar sobre (a) as que pessoalmente considera problemas e porquê, (b) se haverá alguma(s) que preferencialmente trabalharia com os seus alunos e porquê, (c) o valor didáctico de cada uma.

❑ **Propor ao entrevistado a tarefa II**

Tarefa II

Um conjunto de alunos do 9º ano a quem foi pedido que resolvesse o *problema dos discos* apresentou as seguintes propostas de resolução (ver anexo B).

Suponha que era o professor que tinha indicado a tarefa e que pretendia avaliar as propostas de resolução apresentadas. Partindo de uma cotação máxima de 50 pontos, como as classificaria?

1.2 - Documentos utilizados durante as entrevistas

1.2.1 - Anexo A

A1 - Com o dinheiro que a mãe lhe deu o João foi comprar guloseimas a uma confeitaria. Gastou 1/4 do dinheiro que levava em pastéis, 2/5 em chocolates e 1/3 em rebuçados, sobrando-lhe 5$00. Quantos escudos tinha o João?

A2 - Usando apenas seis fósforos, formar quatro triângulos equiláteros geometricamente iguais.

A3 - Mostre que a amplitude de um ângulo com o vértice no interior de uma circunferência é igual à semi-soma das amplitudes dos arcos compreendidos entre os seus lados e os prolongamentos destes lados.

A4 - Os Silvas desejam alcatifar um quarto de forma irregular. Para isso necessitam de fazer uma estimativa da quantidade de alcatifa a comprar e de quanto vão gastar.

A5 - Num dia em que um tanque estava vazio, uma torneira despejou-lhe para dentro 235,2 litros de água. No dia seguinte, o dono do tanque tirou dessa água 105,4 litros para regar a horta. Que quantidade de água ficou no tanque?

A6 - Considerar os seguintes ternos de números :

3	4	5
5	12	13
8	15	17
7	24	25

A7 - O produto de três números inteiros consecutivos é sempre um número par múltiplo de 3. Comentar a situação se substituirmos *produto* por *soma*.

A8 - Calcular utilizando, quando possível, as regras de cálculo com potências:

$$\left[2^{-2} \times \left(\frac{1}{3} \right)^{-2} \right]^{-4} : \left(2 - \frac{1}{2} \right)^{-6}$$

A9 - Dois triângulos que tenham entre si cinco elementos iguais - três lados e dois ângulos ou três ângulos e dois lados - serão necessariamente iguais?

Nota: Usa-se *iguais* no sentido de *congruentes* ou *geometricamente iguais*.

1.2.2 - Anexo B

Problema dos discos:

João e Helena passavam por uma loja de discos quando o João perguntou a Helena:

J: Ainda tens os teus discos de música rock?

H: Não, na 5ª feira encontrei a Joana e dei-lhe metade dos discos que tinha e mais meio disco. Em seguida, no sábado, encontrei o Paulo e dei-lhe metade dos discos que ainda tinha e mais meio disco. Fiquei apenas com um disco, que te darei a ti se me disseres quantos discos de música rock eu tinha no início.

O João ficou embaraçado pois nem sequer conseguia perceber para que servia meio disco. Conseguiu, no entanto, descobrir o número de discos de rock que a Helena tinha.

Conseguirás tu descobrir também quantos eram?

Proposta de resolução B1

x - Número de discos de rock que a Helena tinha

$$x - \left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right) - \left[\frac{x-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)}{2}+\frac{1}{2}\right] = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} - \frac{x-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - x - 1 - x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 + x + 1 - 2 = 4 \Leftrightarrow x = 7$$

R: Tinha 7 discos

Proposta de resolução B2

Se a Helena tivesse 1 disco depois de encontrar a Joana ficaria com 1 - (1/2 + +1/2) ou seja, 0 discos. Depois de encontrar o Paulo ficaria com 0 - (0/2 + 1/2) = - 1/2, o que não pode ser.

Se a Helena tivesse 2 discos, depois da Joana ficaria com 2 - (2/2+1/2) = 1/2; depois do Paulo ficariacom 1/2 - (1/4 + 1/2) = - 1/4; não pode ser.

Se tivesse 3 discos teria, depois do primeiro amigo, 3 - (3/2 + +1/2)=1 e, depois do segundo, 1 - (1/2 + 1/2) = 0; não pode ser.

Se tivesse 4 discos: 4 - (4/2 + 1/2) = 3/2; 3/2 - (3/4 + 1/2) = 1/4; não pode ser.

Com 5 discos: 5 - (5/2 + 1/2) = 2; 2 - (2/2 + 1/2) = 1/2; não pode ser.

Com 6 discos: 6 - (6/2 + 1/2) = 5/2 ; 5/2 - (5/4 + 1/2) =3/4; não pode ser.

Com 7 discos: 7 - (7/2 + 1/2) = 3; 3 - (3/2 + 1/2) = 1.

R: Tinha 7 discos.

Proposta de Resolução B3

$$1 \xrightarrow{+1/2 \times 2} 3 \xrightarrow{+1/2 \times 2} 7$$

R: Tinha 7 discos.

Proposta de resolução B4

A Helena faz duas vezes a mesma coisa: dá metade dos discos que tem e mais meio disco.

Assim, o problema é composto por dois problemas com a mesma forma.

Representando por _x_ o número de discos que a Helena tem antes de encontrar cada amigo, pode dizer-se que ela dá metade de _x_ e mais meio disco a um amigo e fica com _y_ discos.

Ou seja, em cada um dos casos $\frac{x}{2} - \frac{1}{2} = y$. Se no fim de encontrar o segundo amigo ficou com 1 disco, então

$\frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 1 \iff x = 3$

Logo, ela tinha 3 discos ao encontrar o segundo amigo; fazendo y=3, vem x = 7 ou seja, inicialmente tinha 7 discos.

R: Tinha 7 discos.